



RECURSOS DIDÁCTICOS

QUINTO DE SECUNDARIA

TRIGONOMETRÍA

SUMATORIA DE SENOS Y COSENOS

En el presente capítulo aprenderemos a calcular expresiones tales como por ejemplo:

$$\text{Sen}2^\circ + \text{sen}4^\circ + \text{sen}6^\circ + \dots + \text{sen}44^\circ + \text{sen}46^\circ + \text{sen}48^\circ$$
$$\text{Cos}4^\circ + \text{cos}8^\circ + \text{cos}12^\circ + \dots + \text{cos}44^\circ + \text{cos}48^\circ$$

Para eso debemos tener en cuenta los siguientes conceptos previos

● SUCESIÓN NUMÉRICA

$$2, 4, 6, 8, 10, \dots, 30$$

$$3, 6, 8, 12, 15, \dots, 48$$

observación :

$$\sum \longrightarrow \begin{array}{l} \text{Letra griega sigma denota} \\ \text{sumatoria} \end{array}$$

$$\text{la expresión : } \sum_{k=1}^n t_k$$

se lee : "Sumatoria de los números de la forma t_k desde 1 hasta n.

● SERIE NUMÉRICA

$$2 + 4 + 6 + 8 + 10 + \dots + 30 = \sum_{k=1}^{15} 2k$$

$$3 + 6 + 9 + 12 + \dots + 48 = \sum_{k=1}^{18} 3k$$

En nuestro caso :

$$\text{Sen}2^\circ + \text{sen}4^\circ + \text{sen}6^\circ + \dots + \text{sen}46^\circ + \text{sen}48^\circ = \sum_{k=1}^{24} \text{sen}(2k)^\circ$$

$$\text{Cos}4^\circ + \text{cos}8^\circ + \text{cos}12^\circ + \dots + \text{cos}44^\circ + \text{cos}48^\circ = \sum_{k=1}^{12} \text{sen}(4k)^\circ$$

Para poder simplificar sumatorias de ese tipo debemos reconocer lo siguiente:

- P \Rightarrow Primer ángulo
U \Rightarrow último ángulo
n \Rightarrow número de términos
r \Rightarrow razón de la P.A.

● SUMATORIA DE SENOS

$$\sin\alpha + \sin(\alpha + r) + \sin(\alpha + 2r) + \dots + \sin(\alpha + (n-1)r) =$$

$$= \frac{\sin \frac{hr}{2}}{\sin \frac{r}{2}} \cos \left(\frac{P+U}{2} \right)$$

● SUMATORIA DE COSEÑOS

$$\cos\alpha + \cos(\alpha + r) + \cos(\alpha + 2r) + \dots + \cos(\alpha + (n-1)r) =$$

$$= \frac{\cos \frac{hr}{2}}{\cos \frac{r}{2}} \cos \left(\frac{P+U}{2} \right)$$

En nuestro ejemplo:

$$1. \quad \sin 2^\circ + \sin 4^\circ + \sin 6^\circ + \sin 8^\circ + \dots + \sin 46^\circ + \sin 48^\circ$$

$$\text{donde : } P = 2 \quad U = 48^\circ \quad n = 24 \quad r = 2^\circ$$

Obs.- $n \Rightarrow$ número de términos.

$$n = \frac{t_n - t_1}{r} + 1 \Rightarrow n = \frac{48 - 2}{2} + 1 \Rightarrow n = 24$$

Ahora :

$$\sin 2^\circ + \sin 4^\circ + \sin 6^\circ + \dots + \sin 48^\circ =$$

$$\frac{\sin \left(\frac{24 \times 2^\circ}{2} \right)}{\sin \left(\frac{2^\circ}{2} \right)} \sin \left(\frac{2^\circ + 48^\circ}{2} \right) = \frac{\sin 24^\circ}{\sin 1^\circ} \sin 25^\circ$$

$$2. \quad \cos 4^\circ + \cos 8^\circ + \cos 12^\circ + \dots + \cos 44^\circ + \cos 48^\circ$$

$$\text{Donde : } P = 4^\circ \quad U = 48^\circ \quad n = 12 \quad r = 4^\circ$$

$$n = \frac{48 - 4}{4} + 1 \Rightarrow n = 12$$

Ahora :

$$\cos 4^\circ + \cos 8^\circ + \cos 12^\circ + \dots + \cos 44^\circ + \cos 48^\circ =$$

$$\frac{\sin \left(\frac{12 \cdot 4^\circ}{2} \right)}{\sin \left(\frac{4^\circ}{2} \right)} \cos \left(\frac{4^\circ + 48^\circ}{2} \right) = \frac{\sin 24^\circ}{\sin 2^\circ} \cdot \cos 26^\circ$$

Obs -

$$\sum_{i=1}^n \sec 3ix = \sec 2x + \sec 6x + \sec 9x + \dots + \sec 3nx$$

$$\sum_{i=1}^n \frac{1}{1 + \tan(ix)} = \frac{1}{1 + \tan x} + \frac{1}{1 + \tan 2x} + \frac{1}{1 + \tan 3x} + \dots + \frac{1}{1 + \tan nx}$$

PROPIEDADES

$$\cos \frac{\pi}{n} + \cos \frac{3\pi}{n} + \cos \frac{5\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-2)\pi}{n} = \frac{1}{2}$$

$$\cos \frac{2\pi}{n} + \cos \frac{4\pi}{n} + \cos \frac{6\pi}{n} + \dots + \cos \frac{(n-1)\pi}{n} = -\frac{1}{2}$$

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$; impar > 1

EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Reducir :

$$E = \sin 2^\circ + \sin 4^\circ + \sin 6^\circ + \dots + \sin 178^\circ$$

- | | | |
|---------------------|-------------------|---------------------|
| a) $\tan 1^\circ$ | b) $\tan 2^\circ$ | c) $\cotan 1^\circ$ |
| d) $\cotan 2^\circ$ | e) $\tan 4^\circ$ | |

2. Simplificar:

$$E = \sin 10^\circ + \sin 20^\circ + \sin 30^\circ + \dots + \sin 110^\circ$$

- | | |
|--|--|
| a) $\frac{\sqrt{3}\sin 50^\circ}{2\sin 5^\circ}$ | d) $\frac{\sin 55^\circ}{2\sin 5^\circ}$ |
| b) $\frac{\sqrt{3}\sin 55^\circ}{2\sin 5^\circ}$ | e) $\frac{\sin 50^\circ}{2\sin 5^\circ}$ |
| c) $\frac{\sqrt{3}\sin 55^\circ}{\sin 5^\circ}$ | |

3. Reducir :

$$E = \cos x + \cos 3x + \cos 5x + \dots + \cos 13x$$

- | | | |
|------------------------------|-------------------------------|-------------------------------|
| a) $\frac{\sin 7x}{2\sin x}$ | b) $\frac{\sin 14x}{2\sin x}$ | c) $\frac{\sin 16x}{2\sin x}$ |
| d) $\frac{\sin 7x}{\sin x}$ | e) $\frac{\sin 14x}{\sin x}$ | |

4. Reducir:

$$E = \frac{\cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \dots + \cos 18x}{\sin 2x + \sin 4x + \sin 6x + \dots + \sin 18x}$$

- | | | |
|----------------|-----------------|---------------|
| a) $\tan 8x$ | b) $\cotan 10x$ | c) $\tan 10x$ |
| d) $\cotan 8x$ | e) $\tan 10x$ | |

5. Calcular : $E = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$

- | | | |
|---------|-------|--------|
| a) 1 | b) -1 | c) 1/2 |
| d) -1/2 | e) 2 | |

6. Simplificar:

$$E = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$$

- | | | |
|---------|--------|--------|
| a) 1 | b) -1 | c) 1/2 |
| d) -1/2 | e) 1/4 | |

7. Calcular:

$$E = \cos \frac{2\pi}{11} + \cos \frac{4\pi}{11} + \cos \frac{6\pi}{11} + \cos \frac{8\pi}{11} + \cos \frac{10\pi}{11}$$

- | | | |
|---------|--------|---------|
| a) -1/2 | b) 1/2 | c) -3/2 |
| d) 3/2 | e) 1 | |

8. Calcular: $E = \cos^2 \frac{\pi}{7} + \cos^2 \frac{2\pi}{7} + \cos^2 \frac{3\pi}{7}$

- a) 5/2 b) 5/4 c) 7/2
d) 7/4 e) 7/3

9. Calcular:

$$E = \sin^2 \frac{\pi}{21} + \sin^2 \frac{2\pi}{21} + \sin^2 \frac{3\pi}{21} + \dots + \sin^2 \frac{10\pi}{21}$$

- a) 1 b) 1/2 c) 21/2
d) 21/3 e) 21/4

10. Reducir:

$$E = \cos 2x + \cos 4x + \cos 6x + \dots + \cos 2nx$$

$$\text{Si : } (n+1)x = \pi$$

- a) 1 b) -1 c) -ctgx
d) -tgx e) ctgx

11. Calcular: $E = \sum_{n=1}^4 \sin^2 \frac{n\pi}{9}$

- a) 9/2 b) 9/4 c) 9/8
d) 7/8 e) 7/4

12. Reducir: $E = \sum_{k=1}^n \sin \frac{k\pi}{3}$

a) $2 \sin \frac{n\pi}{6} \sin(n+1) \frac{\pi}{6}$

b) $2 \sin \frac{n\pi}{6} \cos(n+1) \frac{\pi}{6}$

c) $2 \sin \frac{n\pi}{3} \sin(n+1) \frac{\pi}{6}$

d) $\sin \frac{n\pi}{2}$

e) $\cos \frac{n\pi}{4} \sin \frac{n\pi}{3}$

13. Si : $\sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1 + \tan i x} \right) = a$ $\sum_{i=1}^n (\sec 2ix) = b$

Hallar : $E = \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{1 - \tan i x} \right)$

- a) n+b+a b) n+b-a c) n+a-b
d) n+a e) n+b

14. Calcular

$$E = \cos \frac{2\pi}{11} + 2 \cos \frac{4\pi}{11} + 3 \cos \frac{6\pi}{11} + \dots + 10 \cos \frac{20\pi}{11}$$

- a) -9/2 b) -11/2 c) 11/2
d) 9/2 e) 11

15. Calcular:

$$E = \cos^3 1^\circ + \cos^3 3^\circ + \cos^3 5^\circ + \dots + \cos^3 59^\circ$$

- a) $\frac{3\sqrt{3}}{4} \csc 1^\circ$ b) $\frac{\sqrt{3}}{4} \csc 1^\circ$ c) $3\sqrt{3} \csc 1^\circ$
d) $4\sqrt{3} \sec 1^\circ$ e) $3\sec 2^\circ$

TAREA DOMICILIARIA N° 8

1. Reducir:

$$E = \sin 4^\circ + \sin 8^\circ + \sin 12^\circ + \dots + \sin 176^\circ$$

- a) $\tan 2^\circ$ b) $\sin 2^\circ$ c) $\tan 88^\circ$
 d) $\cot 88^\circ$ e) $\tan 28^\circ$

2. Reducir:

$$E = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x + \sin 9x$$

- a) $\sin^2 5x \sin x$ d) 1/2
 b) $\sin^2 5x \csc x$ e) 1
 c) $\sin^2 5x \sec x$

3. Simplificar :

$$E = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \dots + \sin 15x$$

Sabiendo que: $\sin 2x = \sin^2 8x \cos x$

- a) 2 b) 1/2 c) 4
 d) 1/4 e) 1

4. Calcular: $E = \cos \frac{2\pi}{7} + \cos \frac{4\pi}{7} + \cos \frac{6\pi}{7}$

- a) 1 b) -1 c) 1/2
 d) -1/2 e) -2

5. Calcular :

$$E = \cos \frac{\pi}{11} + \cos \frac{3\pi}{11} + \cos \frac{5\pi}{11} + \cos \frac{7\pi}{11} + \cos \frac{9\pi}{11}$$

- a) 1 b) -1 c) 1/2
 d) -1/2 e) -2

6. Reducir:

$$E = \cos \frac{\pi}{9} + \cos \frac{3\pi}{9} + \cos \frac{5\pi}{9} + \cos \frac{7\pi}{9}$$

- a) 1 b) 2 c) 1/2
 d) -1/2 e) 1/4

7. Calcular : $E = \cos \frac{\pi}{7} + \cos \frac{3\pi}{7} + \cos \frac{5\pi}{7}$

- a) 1 b) -1 c) 1/2
 d) -1/2 e) -2

8. Calcular :

$$E = \cos \frac{2\pi}{13} + \cos \frac{4\pi}{13} + \cos \frac{6\pi}{13} + \dots + \cos \frac{12\pi}{13}$$

- a) 1 b) -1 c) 1/2
 d) -1/2 e) -2

9. Calcular : $E = \sum_{n=1}^8 \cos^2 \frac{n\pi}{17}$

- a) 15 b) 15/2 c) 15/4
 d) 17/2 e) 17/4

10. Calcular: $E = \sin^2 \frac{\pi}{7} + \sin^2 \frac{2\pi}{7} + \sin^2 \frac{3\pi}{7}$

- a) 7/2 b) 7/4 c) 7/8
 d) 7/16 e) 7/5