LOGARITMOS I

Definición

El logaritmo de un número positivo en una base positiva y diferente de uno será igual al exponente al cual hay que elevar la base para obtener dicho número.

Notación

$\text{Log}_b N = x \leftrightarrow b^x = N \quad \forall\, b > 0 \wedge b \neq 1 \,,\, N > 0$

Ejemplo: Calcular

i. $\text{Log}_2 16 = x$

$2^x = 16$

$2^x = 24$

$x = 4$

ii. $\text{Log}_{16} 32 = x$

$16^x = 32$

$(2^4)^x = 2^5$

$2^{4x} = 2^5$

$4x = 5$

$x = 5/4$

Identidades

a. $\boxed{b^{\text{Log}_b N} = N}$

b. $\boxed{\text{Log}_b\, b = 1}$

c. $\boxed{\text{Log}_b\, 1 = 0}$

Ejemplos:

$7^{\text{Log}_7 3} = 3$

$\text{Log}_4 4 = 1$

$\text{Log}_{20} 1 = 0$

Teoremas

1. $\log_b (AB) = \log_b A + \log_b B$

2. $\log_b \left(\dfrac{A}{B}\right) = \log_b A - \log_b B$

3. $\log_b A^n = n \log_b A$ Regla del sombrero

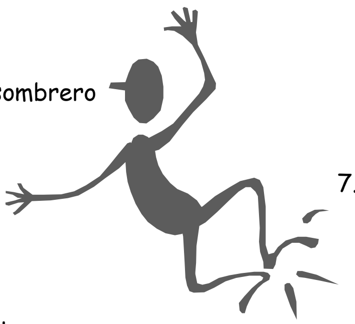
4. $\log_{(b^n)}\left(A^m\right) = \dfrac{m}{n} \log_b A$

5. Regla de la Cadena :

$\log_{\cancel{b}} a \,.\, \log_{\cancel{c}} \cancel{b} \,.\, \log_{\cancel{d}} \cancel{c} \,.\, \log_e \cancel{d} = \log_e a$

Para 2 términos :

$\boxed{\text{Log}_b\, a \,.\, \log_a b = 1} \rightarrow \boxed{\log_b^a = \dfrac{1}{\log_a^b}}$



6. Cambio de Base : $\log_b A = \dfrac{\log_c A}{\log_c b}$

Ejm. :

$\text{Log}_3 7 = \dfrac{\log_{(2)} 7}{\log_{(2)} 3} \qquad \dfrac{\log_{(3)} 5}{\log_{(3)} 12} = \log_{12} 5$

7. $a^{\log_{(b)} c} = c^{\log_{(b)} a}$

Ejm. :

$49^{\log_{(7)} 3} = 3^{\log_{(7)} 49} = 3^2 = 9$

Nota base es :

$\log_{10} N = \log N \qquad \log_e N = \ln N$

Logaritmo Neperiano

Ejercicios de Aplicación

1. Si : $Log_a 2 = x$; $Log_a 3 = y$; $Log_a 5 = 7$. Calcular : $Log_a 2700$

a) 2x + 3y + 2z b) 2x - 3y + 2z c) x + y + z
d) x - y - z e) N.A.

2. Si : $Log_7 4 = m$, $Log_7 5 = n$. Hallar : $Log_7 980$.

a) m - n - 2 b) m + n - 2 c) m + n + 2
d) 2 - m - n e) 2m + n + 1

3. Si : $Log_a x = m$; $Log_a y = n$; $Log_a z = p$. Calcular :

$$R = \log_a\left(\sqrt[3]{\frac{x^2y^5}{z^3}}\right)$$

a) $\frac{2}{3}m - \frac{5}{3}n - p$ d) $\frac{2}{3}m + \frac{5}{3}n - p$
b) $\frac{2}{3}m + \frac{5}{3}n + p$ e) $-\frac{2}{3}m + \frac{5}{3}n + p$
c) $\frac{2}{3}m - \frac{5}{3}n + p$

4. Indique la expresión correcta :

a) $Log_{0.25} 256 = -3$ d) $Log_{256} 0.0625 = -0.5$
b) $Log_{0.25} 0.5 = +0.5$ e) $Log_{0.5} 32 = 5$
c) $Log_{16} 0.125 = -1.5$

5. Log 2 = m , Log 3 = n , x = Log 36. Hallar "x"

a) 2m + 2n b) 2m + n/2 c) 2m - n/2
d) 2m - 2n e) m + n

6. Log 3 = a , Log 2 = b. Hallar : Log (5!)

a) 3a + b + 1 b) a - b + 2 c) 3a - 2b + 1
d) a + 2b + 1 e) 2b - a + 1

7. $Log_{ab} a = 4$. Calcular : $Log_{ab}\left(\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt{b}}\right)$

a) 7/3 b) 5/6 c) 13/6
d) 4/3 e) 17/6

8. Si : $Log_{14} 28 = a$. Hallar : $Log_{49} 16$

a) $\frac{2(a-1)}{2-a}$ b) $\frac{2(1-a)}{2-a}$ c) $\frac{a-2}{1-a}$
d) $\frac{1-a}{2-a}$ e) $\frac{2-a}{1-a}$

9. $10^x = 18$; $10^y = 12$ entonces : Log 6 es :

a) $\frac{2y-x}{3}$ b) $\frac{x-y}{3}$ c) $\frac{2x-y}{3}$
d) $\frac{y-x}{3}$ e) $\frac{x+y}{3}$

10. Si : $3 Log_3 a - 3 Log_3 b = 6$. Calcular : a/b

a) 9 b) 6 c) 2
d) 27 e) 3

11. Si $Log_3 7\ Log_5 3 = \dfrac{100^{\log x^2 - 2x + 2}}{\log(4)^5 \log(7)^4}$

Calcular "x"

a) 1; 2 b) -1; 5 c) 2
d) ± 1 e) 1

12. Si : $2^x + 2^{-x} = 4$. Hallar una solución de "x" :

a) $Log_2 (2\sqrt{3} - 1)$ d) $Log_2 (1 + 2\sqrt{3})$
b) $Log_2 (2 + \sqrt{3})$ e) $Log_2 (1 + \sqrt{3})$
c) $Log_2 (\sqrt{3} - 2)$

13. Reducir : $Log_n\left\{\log_n\left(\sqrt[n-1]{\frac{n}{\sqrt[n]{n}}}\right)\right\}$ si : n > 1

a) -1 b) -2 c) 1
d) 1/2 e) n

14. Reducir :

$$\frac{1+\log_{(2001)}2002}{1-\log_{(2001)}2002} + \frac{1+\log_{(2002)}2001}{1-\log_{(2002)}2001}$$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

15. El logaritmo de "N" en base 5 es el mismo que el logaritmo de M en base $\sqrt{5}$. Si : M + N = $\frac{3}{4}$. Hallar : $\frac{M}{N}$

a) 1/2 b) 1/4 c) 2
d) 1/8 e) 1/6

Tarea Domiciliaria Nº6

1. El valor de : $\sqrt{a^{\mathrm{Log}_{a\sqrt{a}}100}} \cdot \sqrt[3]{\mathrm{Log}_b b^{10}}$

a) 100 b) 1000 c) $\mathrm{Log}_a 100$
d) 10 e) $\mathrm{Log}_b 100$

2. Si : $a > 1 \wedge b > 1$, reducir : $E = b^{a^{\left[\mathrm{Log}_{(a)}\left(\mathrm{Log}_{(b)}a\right)\right]}}$

a) b^a b) a^b c) $a\text{-}b^{\log a}$
d) $\mathrm{Log}\,\frac{b}{a}$ e) N.A.

3. El equivalente de :

$E = \frac{1}{1+\mathrm{Log}_{(3)}(10e)} + \frac{1}{1+\mathrm{Ln}\,30} + \frac{1}{1+\mathrm{Log}\,3e}$ es :

a) 1 b) Log 3 c) Ln 10
d) Ln 30 e) Log (3e)

4. Calcular : $E = \mathrm{Log}_{\left(\sqrt{7\sqrt{7}}\right)}\left(\sqrt{7}\right)^{\sqrt{7}}$

a) 1 b) $\sqrt{7}$ c) 7
d) $\sqrt{7}/2$ e) 7/2

5. Sabiendo "a" y "b" son raíces positivos de la ecuación : $x^2 - 4x + m^2 = 0$. Hallar :
$L = \mathrm{Log}_m a^b + \mathrm{Log}_m a^a + \mathrm{Log}_m b^b + \mathrm{Log}_m b^a$

a) -4 b) 4 c) -8
d) 8 e) 6

6. Al reducir: $\frac{1+\mathrm{Log}_{(2)}3}{1-\mathrm{Log}_{(2)}3} + \frac{1+\mathrm{Log}_{(3)}2}{1-\mathrm{Log}_{(3)}2}$ se obtiene :

a) 0 b) 1 c) 2
d) 1/2 e) -3

7. Indicar verdadero o falso en :

( ) $2\,\mathrm{Log}\,x = \mathrm{Log}\,x^2 \quad \forall\, x \in \mathbb{R}$
( ) $\mathrm{Log}_x x = 1 \quad \forall\, x > 0$
( ) Al resolver $x^{\mathrm{Log}_x(x+4)} = 5 \rightarrow \boxed{x = 1}$

a) FVF b) FFV c) FFF
d) VFV e) VFF

8. Calcula : $\mathrm{Log}_3 3 + \mathrm{Log}_3 9 + \mathrm{Log}_3 27 + \ldots \mathrm{Log}_3 3^{10}$

a) 55 b) 54 c) 53
d) 52 e) 51

9. Reducir : $R = \left(1+\frac{2}{\mathrm{Log}_b(a-1)}\right)\left(1-\frac{2}{\mathrm{Log}_b(a+1)}\right)$

donde $a, b \in \mathbb{R}^+ - \{1\}$, además : $a - b = 1$

a) 1 b) -3 c) 2
d) -2 e) ab

10. Calcular el valor de : $w = \sqrt{7b^{\mathrm{Log}_a 3} + 3^{\mathrm{Log}_a b}}$ si : $\mathrm{Log}_a b = \mathrm{Log}_3 2$

a) 2 b) 7 c) 6
d) 3 e) 4

11. Luego de efectuar :

Sugerencia usar : $\sqrt[\mathrm{Log}_b a]{x} = x^{\mathrm{Log}_a b}$

$$\sqrt[\mathrm{Log}_{(\sqrt{2})}2]{\sqrt[\mathrm{Log}_{(3)}4]{4}\;\sqrt[\mathrm{Log}_{(2)}7]{49}\;\sqrt[\mathrm{Log}_{(2)}5]{25}\;\sqrt[\mathrm{Log}_{(9)}16]{4}}$$

se obtiene :

a) 6 b) 12 c) 18
d) 21 e) 2

12. Si : $a > 0 \;\wedge\; a \neq 1$, reducir :

$S = \frac{\sqrt{\mathrm{Log}\,a} + \sqrt{\mathrm{Log}\sqrt[3]{a}}}{\sqrt{4\,\mathrm{Log}\,a} + \sqrt{3\,\mathrm{Log}\,a^2}}$

a) $\sqrt{3}/3$ b) $\sqrt{3}$ c) 1
d) $3\sqrt{3}$ e) 1/3

13. Con la condición : $x^y \cdot y^x = (xy)^2 \;\wedge\; x \neq y$, simplificar : $E = \frac{x}{\mathrm{Log}_{(y)}x+1} + \frac{y}{\mathrm{Log}_{(x)}y+1}$

a) 1/2 b) 2 c) 1/4
d) 1 e) 0

14. Siendo : $a + b > 0$, reducir :

$L = \frac{\mathrm{Log}_{(3)}\left[\mathrm{Log}_{(9)}(a+b)^{18}\right]}{1+\mathrm{Log}_{(9)}\left[\mathrm{Log}_{(3)}(a+b)\right]}$

a) 2 b) 3/2 c) 1
d) 1/2 e) 1/4

15. Sabiendo: $a = b^{c^x}$. Hallar : $E = x + \mathrm{Log}_c \mathrm{Log}_a b$

a) 1 b) 0 c) $\mathrm{Log}_c a$
d) $\mathrm{Log}_b a$ e) $\mathrm{Log}_c \mathrm{Log}_a b$