OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

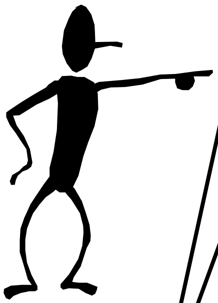
I. INTRODUCCIÓN

GEORGE F.L.P Cantor (1845 - 1918)
Fue el primero en hallar una respuesta acertada a los problemas que surgían del estudio de los conjuntos infinitos. Nació en Rusia en 1845, emigrado con su familia a Alemania cuando tenía once años. A los 15 años ingresó al Wiesbaden Gymnasium (Escuela Preparatoria). Su padre trató de persuadirlo a estudiar ingeniería, sin embargo al no tener éxito continuó sus estudios de matemáticas hasta obtener el grado de Doctor en ciencias en 1867, en la Universidad de Berlín. Entre 1874 y 1884 donde aparecieron sus aportaciones más importantes, ponía en tela de juicio los aspectos básicos de los conjuntos infinitos, esencia misma del Análisis Matemático.

Por lo novedoso de los métodos y los sorprendentes resultados que obtuvo se le considera un matemático creativo y de singular originalidad. Por desgracia no recibió merecido reconocimiento tampoco pudo impartir una cátedra en su especialidad en Berlín; por ello desarrolló su carrera profesional en la Universidad de Halle, como en la mayoría de las ideas originales. Las obras de Cantor fueron objeto de Escarnio de parte de sus contemporáneos más famosos destacando el Matemático **Krohecker** quién fuera su profesor en Berlín, como resultado de estos atropellos sufrió una serie de colapsos y murió en una institución para enfermos mentales en 1918.

Fue hasta años después de su muerte que las ideas de Cantor obtuvieron cierto reconocimiento por parte de sus colegas, la importancia de su contribución radica en su percepción del significado del principio de correspondencia uno a uno y sus consecuencias lógicas.

II. MAPA CONCEPTUAL



Operaciones entre conjuntos

- Unión
  $\rightarrow A \cup B = \{x/x \in A \text{ ó } x \in B\}$
- Intersección
  $\rightarrow A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$
- Diferencia
  $\rightarrow A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$
- Complemento
  $\rightarrow B' = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$ ó
  $B' = \{x/x \notin B\}$
- Diferencia Simétrica
  $\rightarrow A \triangle B = \{x/x \in (A - B) \cup (B - A)$

III. CONCEPTOS PREVIOS

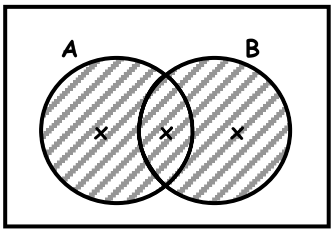
1. UNIÓN O REUNIÓN DE CONJUNTOS

Dados dos conjuntos "A" y "B", se llama reunión de éstos a otro conjunto formado por todos los elementos que pertenecen al conjunto "A" o al conjunto "B" o a ambos.

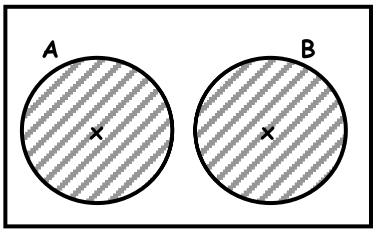
Así por ejemplo; para:
$A = \{1; 2; 3\}$ y $B = \{2; 3; 4; 5\}$, diremos que el conjuntos formado por $\{1; 2; 3; 4; 5\}$ donde están todos los elementos de "A" y de "B", se llama reunión de "A" con "B" y se simboliza:
$A \cup B$, y se lee "A unión B".

Notación: $A \cup B = \{x/x \in A \text{ ó } x \in B\}$

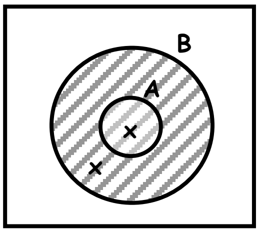
Representación Gráfica:

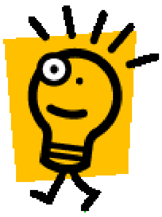


⇑
Conjuntos no disjuntos



⇑
Conjuntos disjuntos





⇑
Conjuntos comparables

Propiedades fundamentales de la reunión:

1. ***Uniforme:*** Dados dos conjuntos, siempre existe y es única la reunión de ellos.
2. ***Conmutativa:*** $A \cup B = B \cup A$
3. ***Asociativa:*** $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
4. ***Reflexiva:*** $A \cup A = A$
5. ***De la inclusión***: Si: $A \subset B$, entonces: $A \cup B = B$ (ver gráfico)
6. ***Del elemento neutro:***
   1) $A \cup \varnothing = A$
   2) $A \cup U = U$

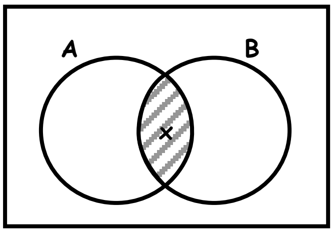
2. INTERSECCCIÓN ENTRE CONJUNTOS

La intersección de dos conjuntos cualesquiera "A" y "B" es otro conjunto formado por todos los elementos que pertenecen a "A" y "B", es decir, está formado por todos los elementos comunes a "A" y "B".

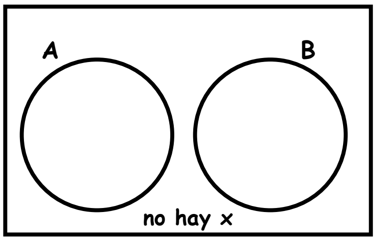
Sean los conjuntos:
A = {1; 2; 3} y B = {2; 3; 4; 5}, observamos que los elementos 2y 3 son comunes a ambos conjuntos. El conjunto formado por estos elementos, se escribe: $A \cap B$ y se lee: "A intersección B".

Notación: $A \cap B = \{x/x \in A \text{ y } x \in B\}$

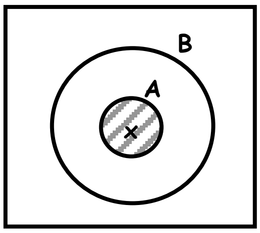
Representación Gráfica:



⇑
Conjuntos no disjuntos



⇑
Conjuntos disjuntos



⇑
Conjuntos comparables

Propiedades fundamentales de la intersección:

1. ***Uniforme:*** Dados dos conjuntos, siempre existe y es única la intersección de ellos.
2. ***Reflexiva:*** $A \cap A = A$
3. ***Conmutativa:*** $A \cap B = B \cap A$
4. ***Asociativa:*** $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
5. ***De la inclusión***: Si: $A \subset B$, entonces: $A \cap B = A$ (ver gráfico)
6. ***De la exclusión***: Si: "A" y "B" son disjuntos entonces: $A \cap B = \varnothing$ (ver gráfico)

7. ***Del elemento neutro:***
   1) $A \cap \varnothing = \varnothing$
   2) $A \cap U = A$

Entre la Reunión y la Intersección de dos conjuntos "A" y "B", se pueden establecer las siguientes relaciones:

Propiedad Distributiva:
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propiedad Absorción:
$A \cup (A \cap B) = A$, puesto que: $(A \cap B) \subset A$
$A \cap (A \cup B) = A$, puesto que: $A \subset (A \cup B)$

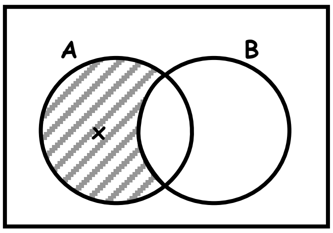
3. DIFERENCIA DE CONJUNTOS

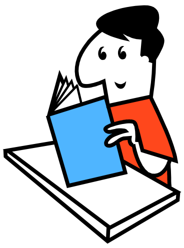
La diferencia de los conjuntos "A" y "B" es el conjunto de todos los elementos que pertenecen a "A", pero que no pertenecen a "B". Se denota por: A – B, que se lee:

"A menos B", ó también "A diferencia B"
Así por ejemplo, sean los conjuntos:
A = {1; 2; 3} y B = {2; 3; 4; 5}
Observamos que el elemento 1 está en el conjunto "A" pero no está en el conjunto "B". Al conjunto formado por 1, se llama diferencia de "A" con "B".

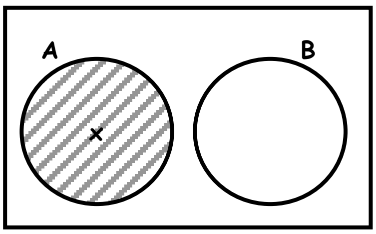
Notación: $A - B = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$

Representación Gráfica:

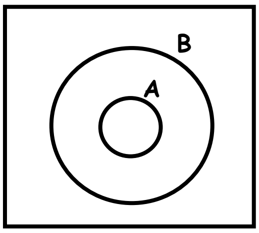




⇑
Conjuntos no disjuntos



⇑
Conjuntos disjuntos



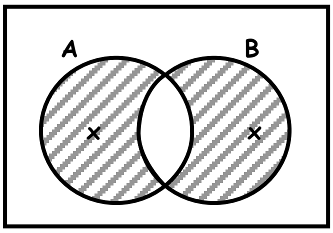
⇑
Conjuntos comparables

4. DIFERENCIA SIMÉTRICA DE CONJUNTOS

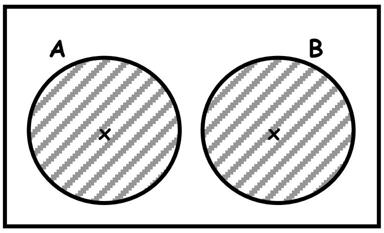
Se denomina diferencia simétrica de "A" y "B" al conjunto formado por la unión de "A - B" con "B - A".
Entonces, en A = {1; 2; 3} y B = {2; 3; 4; 5}, se observa que el elemento 1 pertenece al conjunto "A" pero no pertenece a "B" y los elementos 4 y 5 pertenecen al conjunto "B"; pero no pertenecen al conjunto "A", entonces, al conjunto formado por 1; 4 y 5 se le llama diferencia simétrica de "A" y "B" y se denota por: $A \triangle B$.

Notación: $A \triangle B = \{x/x \in (A - B) \cup (B - A)\}$

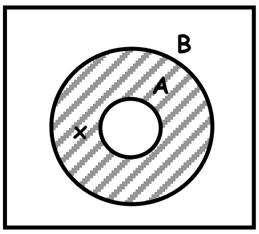
Representación Gráfica:



⇑
Conjuntos no disjuntos



⇑
Conjuntos disjuntos



⇑
Conjuntos comparables

5. COMPLEMENTO ENTRE CONJUNTOS

Sean los conjuntos $A = \{a, b, c, d, e\}$ y el conjunto $B = \{a, c, e\}$, se observa que "B" es subconjunto de "A" y los elementos "b" y "d", pertenecen al conjunto "A" y no pertenecen al conjunto "B". Al conjunto formado por estos elementos: $\{b, d\}$ se le llama complemento de "B" con respecto a "A" y se denota por: B'

Luego, si "B" está incluido en "A", la diferencia: "A - B" se llama complemento de "B" respecto a "A"

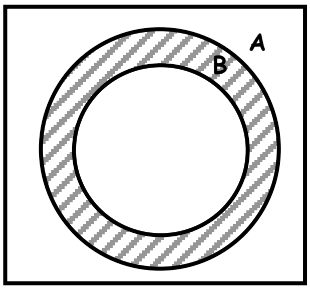
Notación: $B' = \{x/x \in A \text{ y } x \notin B\}$ ó
$B' = \{x/x \notin B\}$

Observación: Si el complemento es respecto al conjunto universal y además se tiene:

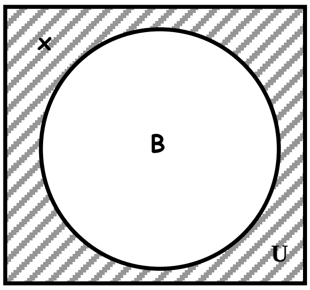
$B \subset U$, entonces:

$B' = \overline{B} = C_B = \{x/x \in U \text{ y } x \notin B\} = \{x \in (U - B)\}$

Representación Gráfica:



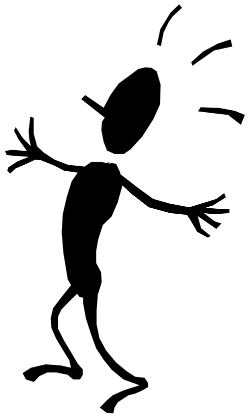
⇑
Complemento de "B" respecto a "A"



⇑
Complemento de "B" respecto a U

Propiedades en la diferencia de conjuntos:

1. ***Reflexiva:*** $A \Delta A = A$
2. ***Conmutativa:*** $A \Delta B = B \Delta A$
3. ***Asociativa:*** $(A \Delta B) \Delta C = A \Delta (B \Delta C)$
4. ***De la inclusión:*** Si: $A \subset B$, entonces:
   1. $A - B = \varnothing$ (ver gráfico)
   2. $A \Delta B = B - A$
5. ***De la exclusión:*** Si: "A" y "B" son disjuntos, entonces:
   1. $A - B = A$
   2. $A \Delta B = A \cup B$
6. ***Del complemento:***
   1. $(A')' = A$
   2. $A \cup A' = U$
   3. $A \cap A' = \varnothing$
   4. $\varnothing' = U$
   5. $U' = \varnothing$
7. ***De la diferencia:***
   1. $A - B = A \cap B'$
   2. $A - B = B' - A'$
8. ***Leyes de Morgan:***
   1. $(A \cup B)' = A' \cap B'$
   2. $(A \cap B)' = A' \cup B'$
9. ***De Absorción:***
   1. $A \cup (A' \cap B) = A \cup B$
   2. $A \cap (A' \cup B) = A \cap B$



6. RELACIONES ENTRE LOS CARDINALES DE LOS CONJUNTOS

1. Si los conjuntos son disjuntos
   $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$

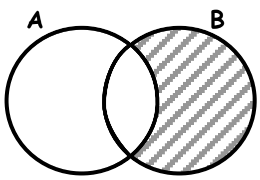
2. Si los conjuntos no son disjuntos:
   a) Para dos conjuntos cualesquiera "A" y "B":
   $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$

   b) Para tres conjuntos "A", "B" y "C" cualesquiera:
   $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

IV. EJEMPLOS ILUSTRATIVOS

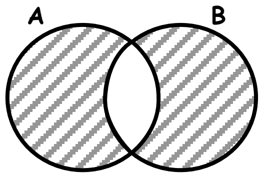
1. ¿Qué operación, representa cada una de las regiones sombreadas?

a)



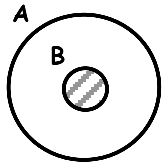
Rpta.: _______________

b)



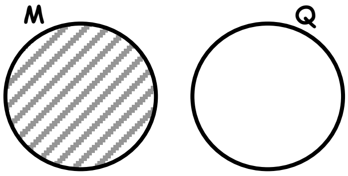
Rpta.: _______________

c)



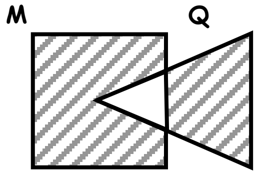
Rpta.: _______________

d)

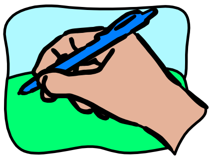


Rpta.: _______________

e)



Rpta.: _______________



Ejercicios de Aplicación

1. Dados los conjuntos:
   A = {1; 2; 3; 4; 5}
   B = {2; 4; 6; 8}
   C = {1; 3; 4; 5; 6}
   Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:

   a) $A \cap C$ = {1; 3; 5; 6} ( )
   b) B – A = {6; 8} ( )
   c) $B \cup C$ = {1; 2; 3; 4; 5; 6} ( )
   d) A – C = {2; 5} ( )
   e) $B \cap C$ = {4; 6; 8} ( )

   a) FVFVV b) FVVFF c) FVVVF
   d) FVFFF e) FVVVV

2. Dados los conjuntos:
   A = {1; 2; 3; 4; 5} ; B = {2; 3; 5; 6}
   U = {1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8}

   Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:
   a) A' = {6; 7; 8} ( )
   b) B' = {7; 8} ( )
   c) $A' \cap B$ = {6; 7} ( )
   d) B' – A = {4; 7; 8} ( )
   e) $A' \cap U$ = {6; 7; 8} ( )

   a) VFVVF b) VFFFV c) VFFFF
   d) VFFVF e) VFVFV

3. Si: A = {a, b, e, d}
   B = {x/x es una vocal}
   Hallar: $A \cap B$

   a) {a, e} b) {a, i} c) {a, o}
   d) {a, u} e) {a}

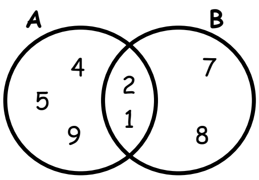
4. Si: A = {a, b, m, t}
   B = {x/x es una vocal de la palabra martes}
   Hallar: B – A

   a) {a, e} b) {a, i} c) {a, o}
   d) {a, u} e) {a}

5. Si: U = {x/x $\in$ N; 0 < x < 10}
   A = {x/x $\in$ N; 4 < x < 9}
   B = {x/x $\in$ N; 3 < x < 8}
   Hallar: A' – B'

   a) {1} b) {2} c) {3}
   d) {4} e) {5}

6. Dados los diagramas de Venn



   Hallar: $A \Delta B$

   a) {4; 5; 7; 8} d) {4; 5; 9; 7}
   b) {4; 5; 2; 1} e) {4; 5; 9}
   c) {4; 5; 9; 7; 8}

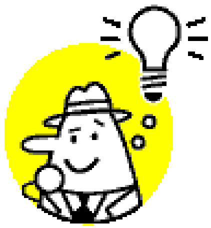
7. Dados los conjuntos:
   A = {x/x $\in$ N; 5 < x < 15}
   B = {x/x $\in$ N; 3 < x < 10}

   ¿Cuántos subconjuntos tiene $A \cap B$?
   a) 4 b) 8 c) 16
   d) 32 e) 64

8. Dados los conjuntos:
$A = \{x + 2 \,/\, x \in \mathbb{N};\ 2 < x < 10\}$
$B = \{3x \,/\, x \in \mathbb{N};\ x \geq 2\}$
¿Cuántos subconjuntos tiene A - B?

a) 4 b) 8 c) 16
d) 32 e) 64

9. Dados los conjuntos:
$A = \{2x \,/\, x \in \mathbb{N};\ 1 < x < 7\}$
$B = \{ \frac{x}{2} \in \mathbb{N};\ / x \in \mathbb{N};\ 1 < x < 10\}$
$C = \{1;\ 5;\ 7;\ 8\}$
Hallar el cardinal de $(B \cup C) \cap A$



a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

10. Si: $n(A) = 12$, $n(B) = 18$ y $n(A \cap B) = 7$
Hallar: $n(A \triangle B)$

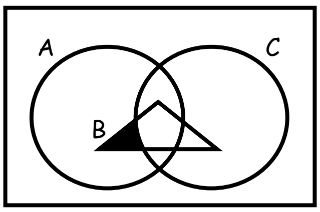
a) 12 b) 16 c) 20
d) 31 e) 15

11. Dados los conjuntos:
$U = \{1;\ 2;\ 3;\ ...;\ 10\}$
$A = \{x/x \in \mathbb{N};\ 4 < x < 10\}$
$B = \{x/x \in \mathbb{N};\ 1 < x < 7\}$
$C = \{1;\ 2;\ 5;\ 8\}$

Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:
I. $A' \cap B = \{2;\ 3;\ 4\}$
II. $A \cap C' = \{6;\ 7;\ 9\}$
III. $(A \cap B)' \cap C = \{1;\ 2;\ 8\}$

a) VFV b) VVF c) FVV
d) VVV e) FFV

12. La región sombreada corresponde a:



a) $(A \cup B) - C$
b) $(B - C) \cap A$
c) $(A - C) \cap (B - A)$
d) $A \cap B \cap C$
e) $A - B$

13. Dado los conjuntos:
$A = \{\frac{x+1}{3} \in \mathbb{N} \,/\, x \in \mathbb{N};\ 1 < x < 15\}$
$B = \{\frac{x+1}{2} \in \mathbb{N} \,/\, x \in \mathbb{N};\ 1 < x < 12\}$
¿Cuántos subconjuntos tiene: $A \cap B$?
a) 16 b) 18 c) 8
d) 32 e) 64

14. En la sección de 3ro. "B" hay 25 alumnos, se sabe que a 12 alumnos les gusta el curso de historia y los 18 el curso de lenguaje. Si a todos les gusta al menos uno de los dos cursos mencionados, ¿a cuántos les gusta sólo historia o sólo lenguaje?

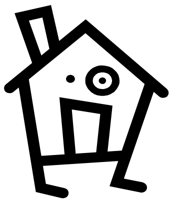
a) 15 b) 12 c) 18
d) 23 e) 20

15. De un grupo de 100 turista europeos se sabe que:
- 36 visitarán Argentina
- 20 visitarán Brasil
- 25 visitarán Colombia
- 12 visitarán Argentina y Colombia
- 9 visitarán Brasil y Colombia
- 10 visitarán Argentina y Brasil
- 6 visitarán los tres países mencionados

a) ¿Cuántos no visitaran estos países?

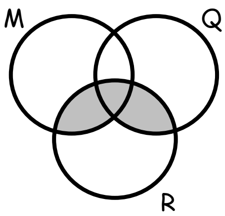
b) ¿Cuántos visitaron Brasil o Argentina pero no Colombia?

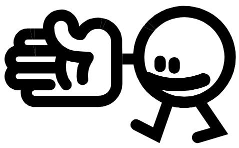
a) 44 y 4 b) 26 y 31 c) 38 y 31
d) 44 y 31 e) 44 y 17



Tarea Domiciliaria

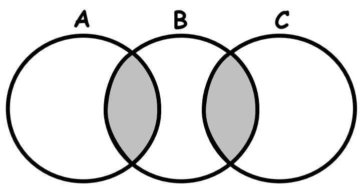
1. ¿Qué operación representa la región sombreada?





a) $M \cap Q$
b) $(M \cup Q) \cap R$
c) $(M \cap R) \cup (Q - R)$
d) $(Q \cap R) \cup (M \cap Q)$
e) $(Q \cap R) \cup M$

2. ¿Qué operación representa la región sombreada?



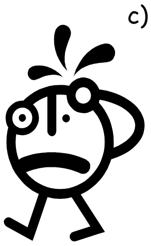
a) $(A \cap B) \cup C$
b) $(B \cap C) \cup A$
c) $(A \cup B) \cap C$
d) $(A \cup C) \cap B$
e) $(A - B) \cup (B \cap C)$

3. Dado los conjuntos:
$A = \{1; 2; 5; 8; 10\}$
$B = \{2; 3; 6; 8\}$
$C = \{x/x \in A, x < 7\}$
Hallar el cardinal de $(B \cup C) \cap A$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) N.A.

4. Dados los conjuntos:
$U = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$
$A = \{2x \,/\, x \in \mathbb{N};\ 2 < x < 8\}$
$B = \{x + 2 \,/\, x \in \mathbb{N};\ 2 < x < 8\}$
Hallar la suma de los elementos de $A' \cap B'$

a) 12 b) 14 c) 10
d) 8 e) 7



5. Si: $n(A) = 13$
$n(B) = 15$
$n(A \cup B) = 23$
Hallar: $n(A \cap B)$

a) 3 b) 4 c) 5
d) 6 e) 8

6. Dados los conjuntos A, B, se sabe que :
$n(A \cup B) = 18$
$n(A - B) = 7$
$n(A \triangle B) = 13$
Hallar: $n(A) + n(B)$

a) 25 b) 20 c) 21
d) 23 e) 17

7. Indicar (V) ó (F) según corresponda:
I. Si: $A \subset B$, entonces $A \cup B = B$ ( )
II. Si: $A \subset B$, entonces $A \cap B = \varnothing$ ( )
III. Si: $A \cap B = \varnothing$ entonces $A - B = A$ ( )

a) VVF b) VFV c) VFF
d) FFV e) FVF

8. Si: $A \subset B$. Simplificar:
$A \cap [(A \cup B) - (A \cap B)]$

a) A b) B c) A – B
d) B – A e) $\varnothing$

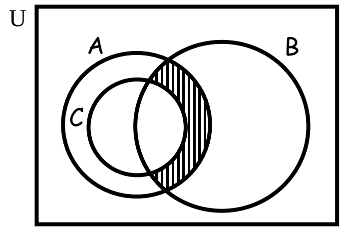
9. Sean los conjuntos:
$A = \{a, b\}$
$B = \{a, b, \{a\}, \{b\}\}$
Hallar el cardinal de $P(A) \cap B$

a) 1 b) 2 c) 3
d) 4 e) 5

10. Si los conjuntos "A" y "B" son unitarios. Hallar: $A \cup B$
$A = \{a + b; 12\}$
$B = \{b - 4; 2a - b\}$

a) {12; 5} b) {12; 7} c) {12; 3}
d) {12} e) {8}

11. ¿Qué operación representa la región sombreada?



a) $(A \cup B) - C$
b) $(A \cap B) \cup C$
c) $(A - C) \cup B$
d) $(A - C) \cap B$
e) $(A \cap C) \cup B$

12. Indicar verdadero (V) o falso (F) según corresponda:
I. $(A \cap B) \cap (A \cup B) = A \cup B$
II. $A \triangle B = A \cup B$; si: $A \cap B = \varnothing$
III. $A - B = A \cap B'$

a) FVV b) VVV c) VFV
d) FVF e) FFV

13. Dados los conjuntos "A" y "B" subconjuntos del universo "U", se sabe que:
$n(A') = 12$
$n(B') = 17$
$n(A \cup B)' = 5$
$n(U) = 28$
¿Cuántos subconjuntos tiene $A \cap B$?

a) 8 b) 32 c) 64
d) 16 e) 128

14. Dados los conjuntos:
$A = \{a, \{a\}, \varnothing\}$
$B = \{a, b\}$
Hallar el cardinal de $A \cap P_{(B)}$

a) 0 b) 1 c) 2
d) 3 e) 4

15. "A" y "B" son subconjuntos del universo "U" y se cumple que:
$A \cap B = \varnothing$
$n[P_{(B)}] = 64$
$n(A') = 15$
$n(A \cup B) = 10$
Hallar: $n(U)$

a) 12 b) 13 c) 15
d) 19 e) 21