INECUACIONES DE SEGUNDO GRADO

INECUACIÓN CUADRÁTICA

Forma general:

$$P(x) = ax^2 + bx + c \gtrless 0; \quad a \neq 0$$

Donde: $\{a; b; c\} \subset R$

Del rectángulo se obtiene:

$$ax^2 + bx + c > 0; \; ax^2 + bx + c < 0$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0; \; ax^2 + bx + c \leq 0$$

La solución de la inecuación depende del primer coeficiente y del discriminante:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

PRIMER CASO

Si: $\Delta > 0$; $(a > 0)$, el polinomio: $ax^2 + bx + c$, es factorizable en el campo real, para resolver utilizaremos el método de los **puntos críticos**.

$$a(x - x_1)(x - x_2) \gtrless 0$$

Procedimiento:

1. Se factoriza el polinomio.
2. Hallar los dos puntos críticos, luego se ordenan en la recta real en forma creciente.
3. Es indispensable que el primer coeficiente de cada factor lineal sea positivo, por ello se colocan entre los puntos críticos los signos (+) y (-) alternadamente de derecha a izquierda; comenzando por el signo (+).
4. Si tenemos:

   $P_{(x)} = ax^2 + bx + c < 0$ ó $P_{(x)} = ax^2 + bx + c \leq 0$

   El conjunto solución estará formado por los intervalos donde aparezca el signo (-).

   En forma análoga:

   $P_{(x)} = ax^2 + bx + c > 0$ ó $P_{(x)} = ax^2 + bx + c \geq 0$

   El conjunto solución estará formado por el intervalo donde aparece el signo (+).

Intervalos	Factorizando	Puntos Críticos	Graficando	Conjunto Solución
$x^2 + x - 20 \leq 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$5x^2 + x - 6 > 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$20x^2 - x - 1 < 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$6x^2 - 13x + 6 \geq 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$ax^2 + (a + 1)x + 1 < 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$2x^2 + 9x + 9 \leq 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$4x^2 + 7x + 3 \geq 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	
$2x^2 - 7x + 3 < 0$	( )( )	{ }	$-\infty$ $+\infty$	

SEGUNDO CASO

Si: $\Delta = 0$; $(a > 0)$, el polinomio: $ax^2 + bx + c$, se transforma a un trinomio cuadrado perfecto de la forma:

$$(mx + n)^2 \gtrless 0$$

Ejemplo

1. Resolver: $x^2 - 10x + 25 \gtrless 0$

Solución:

Calculando la discriminante:

$$\Delta = (-10)^2 - 4(1)(25) = 0$$

$$\underbrace{x^2 - 10x + 25}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} \gtrless 0$$

$$(x - 5)^2 \gtrless 0$$

Resolviendo cada una de las desigualdades:

a. $(x - 5)^2 \geq 0$

se verifica: $\forall\ x \in R$

$\therefore$ C.S. = R

b. $(x - 5)^2 > 0$

se verifica: $\forall\ x \in R$; a excepción de:

$$x - 5 = 0$$

$$x = 5$$

$\therefore$ C.S. = R – {5}

c. $(x - 5)^2 < 0$

se observa una inecuación, la cual verifica para ningún valor de $x \in R$.

$\therefore$ C.S. = ϕ

d. $(x - 5)^2 \leq 0$

la inecuación sólo se cumple si: x - 5

$\therefore$ C.S. = {5}

Inecuación	Trinomio Cuadrado Perfecto	Conjunto Solución
$x^2 - 6x + 9 > 0$		
$x^2 - 6x + 9 \geq 0$		
$x^2 - 6x + 9 < 0$		
$x^2 - 6x + 9 \leq 0$		
$x^2 + 4x + 4 > 0$		
$x^2 + 4x + 4 \geq 0$		
$x^2 + 4x + 4 < 0$		
$x^2 + 4x + 4 \leq 0$		

TERCER CASO

Si: $\Delta < 0$; $(a > 0)$, el polinomio: $ax^2 + bx + c$, se transforma en un cuadrado perfecto más un cuarto número real positivo, de la forma:

$$(mx + n)^2 + k \gtrless 0; \;\; k > 0$$

Ejemplo

1. Resolver: $x^2 + 2x + 6 \gtrless 0$

Solución:

Calculando la discriminante:

$$\Delta = 2^2 - 4(6)(1)$$

$$\Delta = -20 < 0$$

$$\underbrace{x^2 + 2x + 1}_{\text{Trinomio cuadrado perfecto}} + 5 \gtrless 0$$

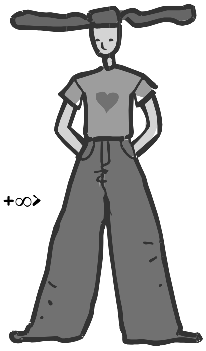
$$(x + 1)^2 + 5 \gtrless 0$$

Resolviendo cada una de las desigualdades:

a. $\underbrace{(x+1)^2}_{+} + \underbrace{5}_{+} > 0$

se verifica: $\forall\, x \in R$

$\therefore$ C.S. = R = $\langle -\infty; +\infty \rangle$



b. $\underbrace{(x+1)^2}_{+} + \underbrace{5}_{+} \geq 0$

se verifica: $\forall\, x \in R$

$\therefore$ C.S. = R = $\langle -\infty; +\infty \rangle$

c. $\underbrace{(x+1)^2}_{+} + \underbrace{5}_{+} < 0$

nunca se verifica pues el primer miembro siempre es mayor que cero:

$\therefore$ C.S. = ϕ

d. $\underbrace{(x+1)^2}_{+} + \underbrace{5}_{+} \leq 0$

nunca se verifica:

$\therefore$ C.S. = ϕ

Inecuación	Completando Cuadrados	Comentario -Se verifica $\forall$ x $\in$ R - Nunca se verifica	-C.S. = R = $\langle -\infty; +\infty \rangle$ -C.S. = ϕ
$x^2 + 2x + 9 > 0$			
$4x^2 - 4x + 6 < 0$			
$X^2 + 4x + 12 \geq 0$			
$X^2 - 6x + 10 \leq 0$			
$x^2 - 2x + 7 > 0$			
$4x^2 + 4x + 9 < 0$			
$X^2 + 6x + 10 \geq 0$			
$X^2 + 8x + 20 \leq 0$			

Inecuación	Completando Cuadrados	Comentario -Se verifica $\forall\ x \in R$ - Nunca se verifica	-C.S. = R = $\langle -\infty; +\infty \rangle$ -C.S. = ϕ
$4x^2 - 3x + 1 > 0$			
$2x^2 + x + 2 < 0$			
$6x^2 - 3x + 2 \geq 0$			
$5x^2 - 2x + 1 \leq 0$			

INECUACIÓN CUADRÁTICA

Si el polinomio:

$$P(x) = ax^2 + bx + c; \ \{a; b; c\} \subset R$$

tiene discriminante ($\Delta = b^2 - 4ac$) negativo y ($a > 0$), entonces:

$$ax^2 + bx + c > 0; \ \forall\ x \in R$$

Ejemplo

1. Hallar el menor de los números "M" que cumple la siguiente condición:

$$\forall\ x \in R: 4x - x^2 - 12 \leq M$$

Solución:

$$4x - x^2 + 12 \leq M$$

multiplicando a todos los términos de desigualdad por (-1) se tiene:

$$x^2 - 4x + 12 \geq -M$$

$$x^2 - 4x + (M + 12) \geq 0$$

como se verifica $\forall\ x \in R$ y el primer coeficiente es positivo ($1 > 0$), entonces el discriminante debe ser menor o igual a cero.

Luego tenemos:

$$\Delta = 16 - 4(M + 12) \leq 0$$

$$16 - 4M - 48 \leq 0$$

$$-32 \leq 4M \leftrightarrow 4M \geq -32$$

$$M \geq -8$$

Graficando:

Del gráfico, el menor valor de M es -8.

Corolario

Si el polinomio:

$$P_{(x)} = ax^2 + bx + c; \ \{a; b; c\} \subset R$$

tiene discriminante: $\Delta < 0$; ($a < 0$), entonces:

$$ax^2 + bx + c < 0 \qquad \forall\ x \in R$$

Ejercicios de Aplicación

BLOQUE I

1. Resolver: $x^2 - x - 6 \geq 0$
dar el intervalo solución.

a) $\langle -\infty; 2] \cup \langle 3; +\infty \rangle$
b) $\langle -\infty; 2] \cup [3; +\infty \rangle$
c) $[2; 3]$
d) $\langle 3; +\infty \rangle$
e) $\langle -\infty; 2 \rangle$

2. Resolver: $2x^2 - 7x + 6 \leq 0$

a) $[2; +\infty \rangle$
b) $[-\frac{3}{2}; 2]$
c) $[\frac{3}{2}; 2]$
d) $\langle -\infty; 2]$
e) $\langle 4; +\infty \rangle$

3. Resolver: $x^2 \leq 9$
dar su intervalo solución.

a) $[-3, 3]$
b) $\langle -\infty; -3] \cup [3; +\infty \rangle$
c) R
d) ϕ
e) $\langle -3; 3 \rangle$

4. De los siguientes enunciados, ¿cuántas son verdaderas?

I. $x^2 > 0 \rightarrow x \in R$
II. $(x - 1)^2 \geq 0 \rightarrow x \in R$
III. $(x + 3)^2 \leq 0 \rightarrow x \in R$
IV. $(2x - 3)^2 \leq 0 \rightarrow x \in \left\{\frac{3}{2}\right\}$
V. $x^2 \leq 0 \rightarrow x \leq 0$

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

5. Resolver: $x^2 - 4x + 1 < 0$
dar un intervalo de su solución.

a) $[0;\ 2+\sqrt{3} >$
b) $[2-\sqrt{3};\ 0 >$
c) R
d) Hay dos respuestas
e) ϕ

6. Resolver: $x^2 + 4x < 0$

a) $\langle -4, 0 \rangle$
b) $\langle -3, 3 \rangle$
c) $R - \{-4, 0\}$
d) $R - \langle 0, -4 \rangle$
e) R^-

7. Resolver: $3x^2 - 2x - 5 < 0$
dar un intervalo de su solución.

a) $\langle -\infty; -1 \rangle$
b) $< \frac{5}{3}; +\infty >$
c) $< -1; \frac{5}{3} >$
d) ϕ
e) R

8. Resolver: $x^2 - 8x + 8 > 4 - 4x$

a) $[2; +\infty \rangle$
b) $\langle -\infty; 2 \rangle$
c) $\langle 2; +\infty \rangle$
d) $R - \{2\}$
e) ϕ

9. Resolver: $x^2 + 2x - 1 < 0$

a) $< -\sqrt{2}; \sqrt{2} >$
b) $< -\sqrt{2}-1; -\sqrt{2}+1 >$
c) $< 1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2} >$
d) $< -\sqrt{2}-1; \sqrt{2}-1 >$
e) $< -2-\sqrt{2}; 2-\sqrt{2} >$

10. Halle el mayor valor de "k", si:

$$x^2 - 10x + 40 \geq k$$

Satisface: $\forall\ x \in R$

a) 4
b) 5
c) 6
d) 7
e) 8

BLOQUE II

1. Resolver:

$$(x - 2)^2 \leq 16$$

a) $\langle -\infty; -2] \cup [6; +\infty \rangle$
b) $\langle -2; 6 \rangle$
c) $[-2; 6]$
d) R
e) ϕ

2. Resolver:

$$x(x + 4)(x + 6) + 16 \leq (x + 1)(x + 2)(x + 6)$$

a) $x \in \phi$
b) $x \in \{-2\}$
c) $x \in \langle -\infty; +\infty \rangle$
d) $x \in \langle 2; +\infty \rangle$
e) $x \in \{2\}$

3. Si el intervalo solución de:

$$5(x + 1)^2 - 3(x - 1)^2 > 12x + 8$$

es: $\langle -\infty; a\rangle \cup \langle b; +\infty\rangle$. Hallar: "a - b"

a) -5 b) 12 c) 8
d) -2 e) N.A.

4. Sea la inecuación cuadrática: $x^2 - mx + p \leq 0$

cuya solución es: $x \in [2; 4]$, indique: $\dfrac{p-m}{2}$

a) 1 b) -1 c) 2
d) -2 e) 3

5. Hallar el número "M", con la propiedad que $\forall\, x \in R$

$$1 + 6x - x^2 \leq M$$

a) 8 b) 11 c) 9
d) 12 e) 10

6. Sea la inecuación cuadrática: $ax^2 + (a + 3)x + 4 \leq 0$ si su conjunto solución es unitario, indique el menor valor de "a".

a) 9 b) -1 c) 1
d) -9 e) 0

7. Resolver: $x^2 + 10x + 27 \geq 0$

a) $\langle -\infty; +\infty\rangle$
b) $\langle -\infty; \sqrt{5} - \sqrt{3}\rangle$
c) $\langle -3 - \sqrt{5}; +\infty\rangle$
d) $\langle -3 + \sqrt{5}; +\infty\rangle$
e) ϕ

8. Al resolver el sistema:

$$x^2 + x + 1 \leq x + 50 < x^2 - 3x + 50$$

su solución es: $[a; b\rangle \cup \langle c; d]$

indique: $M = ac - b - d$

a) -28 b) -35 c) 0
d) 19 e) 21

BLOQUE III

1. La inecuación cuadrática:

$$x^2 + ax + b > 0$$

$\{a, b\} \subset Z$, tiene como conjunto solución.

$$R - [1 - \sqrt{5};\ 1 + \sqrt{5}]$$

Hallar: $a^2 - b^3$

a) 4 b) 64 c) 68
d) 60 e) 65

2. Hallar "a", para que el sistema:

$$2x^2 + 3x - 9 < 0$$
$$2x^2 - 3x - 5 < 0$$
$$x > a$$

tenga solución única en Z.

a) -0,3 b) 0,2 c) 1,2
d) -1,3 e) 2

3. Resolver: $ax + bx^2 \leq a + bx$

$b < a < 0$

a) $\langle 1; \frac{a}{b}\rangle$

b) $\langle -\infty; 1\rangle \cup \langle \frac{a}{b}; +\infty\rangle$

c) $\langle 1; \frac{b}{a}\rangle$

d) $\langle -\infty; 1\rangle \cup \langle \frac{b}{a}; +\infty\rangle$

e) $\langle -\infty; -\frac{a}{b}\rangle \cup \langle 1; +\infty\rangle$

4. Sean los conjuntos:

$$A = \{x \in R \,/\, x^2 - x - 2 \geq 0\}$$
$$B = \{x \in R \,/\, x^2 - 4x - 5 \leq 0\}$$

Hallar: $A \cap B$

a) $[2; 5] \cup \{-1\}$
b) $[-1; 2] \cup [5; +\infty\rangle$
c) $\langle -\infty; -1] \cup [2; 5]$
d) $[2; 5]$
e) N.A.

5. Del problema anterior, hallar: $A \cup B$

a) $\langle -\infty; +\infty\rangle$ b) $\langle -\infty; 5]$ c) $\langle -\infty; -1]$
d) $\langle -\infty; 2]$ e) N.A.

6. Del problema 8, hallar: $(A' \cap B')$

a) $\{-1\}$ b) $\langle 2; 5\rangle$ c) $\langle -1; 5\rangle$
d) ϕ e) N.A.

Tarea Domiciliaria Nº 4

1. Resolver: $3x^2 - 11x + 6 < 0$;
su intervalo solución sera:

a) $< \frac{2}{3};\ 3 >$
b) $< -\infty;\ \frac{2}{3} > \cup < 3; +\infty >$
c) $[\frac{2}{3};\ 3]$
d) ϕ
e) $<3; +\infty>$

2. Resolver: $3x^2 - 7x + 4 > 0$; indicar un intervalo.

a) $<-\infty; 1>$
b) $< -\infty; \frac{3}{2} >$
c) $<-3; +\infty>$
d) $<-4; +\infty>$
e) $< \frac{1}{3}; 4 >$

3. Resolver: $x^2 > 3$; dar un intervalo de su solución.

a) $<-3; 3>$
b) $<-3; +\infty>$
c) $<3; +\infty>$
d) R
e) ϕ

4. Resolver: $x^3 + 1 < (x - 1)^3$

a) $x \in <0; 1>$
b) $x \in <-\infty; 1]$
c) $x \in [-1; 0]$
d) $x \in [-1; +\infty>$
e) $x \in <-1; 1>$

5. Resolver: $x^2 - 2x - 1 \geq 0$
dar un intervalo de su solución.

a) $[1+\sqrt{2}; +\infty >$
b) $[1-\sqrt{2}; 1+\sqrt{2}]$
c) $< -\infty; 1-\sqrt{2} >$
d) R
e) ϕ

6. Resolver: $x^2 - 6x + 25 < 11$

a) $<3; +\infty>$
b) $<-5; +\infty>$
c) ϕ
d) R
e) R^+

7. Resolver: $(x - 3)^2 \leq 0$

a) R
b) $[3; +\infty>$
c) $<-\infty; 3]$
d) 3
e) ϕ

8. Hallar los valores de "m", para que la ecuación cuadrática: $(m + 3)x^2 - 2mx + 4 = 0$
tenga soluciones reales.

a) $<-\infty; -2> \cup <6; +\infty>$
b) $<-2; 6>$
c) $<-6; 2>$
d) $<-\infty; -6> \cup <2; +\infty>$
e) ϕ

9. Resolver el sistema:

$$x^2 - 11x + 24 < 0$$
$$x^2 - 9x + 20 > 0$$

dar como respuesta el número de valores enteros que la verifican.

a) 1
b) 2
c) 3
d) 4
e) 5

10. Resolver: $x^2 + ab \leq (a + b)x$; $a < b < 0$

a) $x \geq a$
b) $x \geq b$
c) $b \leq x \leq a$
d) $a \leq x \leq b$
e) $x \geq a + b$

11. Sea el sistema de ecuaciones:

$$x^2 - 8x - 9 \leq 0$$
$$x \leq a$$

si su conjunto solución es unitario, indique el valor de "a".

a) 8
b) 8,5
c) 9
d) -1
e) 7

12. Resolver: $x(x-5)+\frac{3}{x-6} < (x-4)(x-1)+\frac{3}{x-6}$

a) ϕ
b) R
c)
d)
e)

13. Resolver: $x^2 + 10x + 27 \leq 0$

a) $x \in \phi$
b) $x \in <-\infty; +\infty>$
c) $<-\infty; -2>$
d) $< -\sqrt{2}-1; -\sqrt{2}+1 >$
e) $<-\infty; -3>$

14. Resolver: $(5 + 2x)(3 - 4x) \geq 0$

a) $x \in [-\frac{2}{5}; \frac{3}{4}]$
b) $x \in < -\infty; -\frac{2}{5}] \cup [\frac{3}{4}; +\infty]$
c) $x \in [-\frac{5}{2}; \frac{3}{4}]$
d) $x \in < -\infty; -\frac{5}{2} > \cup [\frac{3}{4}; +\infty >$
e) $x \in R$

15. Resolver: $-2x^2 - x + 10 \leq 0$

a) $x \in [-2; \frac{5}{2}]$
b) $x \in < -\infty; 3 > \cup [\frac{5}{2}; +\infty >$
c) $x \in < -\infty; -\frac{5}{2}] \cup [2; +\infty >$
d) $x \in [-\frac{5}{2}; 2]$
e) $x \in R$