RECURSOS DIDÁCTICOS

CUARTO DE SECUNDARIA — ÁLGEBRA

MATRICES Y DETERMINANTES

❖ Matrices

1. **Definición**.- Una matriz real es un conjunto de números reales arreglados en filas y columnas en forma de rectángulo.

Ejemplos:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -9 & -4 \end{pmatrix} \quad ; \quad B)\begin{pmatrix} 2 & -\sqrt{3} & 5/7 \\ 1 & -3/4 & \pi \end{pmatrix} \quad ; \quad C = \begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ \frac{5}{9} \end{pmatrix} \quad ; \quad D)\begin{pmatrix} -41 & \frac{2}{7} & \sqrt[3]{4} \end{pmatrix}$$

2. **Notación**.-

columnas

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 5 \end{pmatrix} \text{ filas}$$

Columna j (j = 2)

$$N = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & -3 & -2 & 1 & 5 \\ -1 & 4 & -5 & 3 & 4 \\ 5 & 1 & 3 & 4 & 2 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{Fila I } (i = 3)$$

Fila 1 : 3, -2, 0, 2, 1
Fila 3 : -1, 4, -5, 3, 4
Columna 1 : 3, 2, -1, 5
Columna 3 : 0, -2, -5, 3

El 4 es el elemento que pertenece a la tercera fila y a la segunda columna esto se denota por :

$$4 = n_{32}$$

Letra de la matriz (minúscula)
Número de columnas
Número de filas

$n_{34} = 3$ | n_{25} = ____
n_{12} = ____ | n_{11} = ____
n_{43} = ____ | n_{44} = ____

"El elemento de la fila i, columna j, se representa por n_{ij}"

Una matriz en general, se escribe:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix} = (a_{ij})_{3\times4}$$

Nota

a. Sin una matriz tiene "m" filas y "n" columnas se dice que es una matriz de orden m x n.

   En el ejemplo anterior A es un matriz de orden 3 x 4.

b. Si el número de filas es igual al número de columnas entonces se dice que la matriz es cuadrada y que su orden es "n".

   Ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ es una matriz cuadrada de orden 2.

c. Si A es una matriz cuadrada, la diagonal principal de A, está formada por los elementos a_{ij}. Diag(M) = {2; -4}

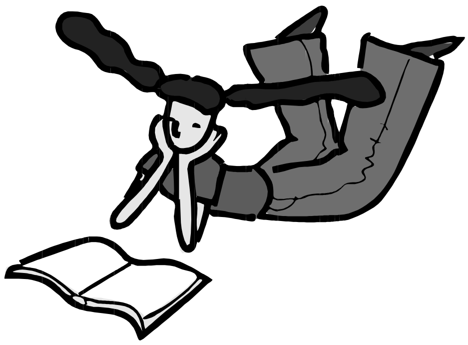
d. Se llama traza de una matriz a la suma de los elementos de su diagonal principal. Traza(M) = 2 + (-4) = -2

3. **Matrices Iguales**.- Dos matrices A y B son iguales, si lo son todos los elementos que ocupan las mismas posiciones, es decir : $a_{ij} = b_{ij}$, para todo i, j.

Ejemplos:

A. $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}$

B. Para que: $\begin{pmatrix} 2 & x \\ y & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -2 \\ 3 & b \end{pmatrix}$ se debe verificar que : a = 2 , x = -2 , y = 3 , b = -1.



4. **Matrices Especiales**.-

a. **Matriz Nula**.- Todos sus elementos son ceros. Se denota por O.

   Ejemplo: $O_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

b. **Matriz Diagonal**.- Todos los elementos que no pertenecen a la diagonal principal son ceros.

   Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$

c. **Matriz Escalar**.- Es una matriz diagonal en la cual todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

Ejemplo: $M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d. **Matriz Identidad**.- Es la matriz escalar en la que sus elementos de la diagonal principal son iguales a la unidad.

Ejemplo: $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

e. **Matriz Traspuesta**.- Se obtiene permutando las filas por las columnas.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow A^t = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$

5. **Suma de Matrices**.- Si A y B son matrices del mismo orden, entonces A + B es la matriz en la que cada elemento es la suma de los elementos de la misma fila y columna de A y B.

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 5 & -4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -4 & 1 \\ -5 & 2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 & -1 \\ -1 & 7 & -5 \end{pmatrix}$

6. **Resta de Matrices**.- Se procede de la misma forma que la suma.

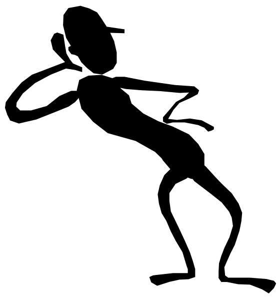
Ejemplo: $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -3 & 5 \\ 8 & -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -3 \\ -11 & 7 & 0 \end{pmatrix}$

7. **Multiplicación por un Escalar**.- Se obtiene multiplicando todos los elementos de la matriz por el escalar.

Ejemplo: $3\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & 9 \end{pmatrix}$

8. **Producto de Matrices m x r por r x n**.- Para efectuar esta operación se debe cumplir que el número de columnas de la primera matriz debe ser igual al número de filas de la segunda matriz.

Ejemplos:



a. $(1 \quad 2 \quad -1) \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} = 1 \cdot 3 + 2 \cdot 4 + (-1)(-1) = 12$

b. Sea : $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 4 & -1 & 2 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 3 & 6 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 2.4+3.3+1(-2) & 2.5+3.6+1(-1) \\ 4.4+(-1)3+2(-2) & 4.5+(-1)6+2(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 27 \\ 9 & 12 \end{pmatrix}$$

❖ Determinantes

☞ **Determinante de Segundo Orden**.- Si : $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow |A| = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

Determinante de A

Ejemplo: $\begin{vmatrix} 3 & -5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3 \cdot 4 - (2)(-5) = 12 + 10 = 22$

$\begin{vmatrix} x & 0 \\ 1 & x^2 \end{vmatrix} = x \cdot x^2 - 1 \cdot 0 = x^3$

☞ **Determinante de Tercer Orden**.- Si : $A = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$ para calcular su determinante se procede de la siguiente manera :

1° Se escriben las dos primeras filas debajo de la tercera :

$$\begin{array}{|ccc|} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ \end{array}$$
$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array}$$

2° Se calculan los productos de los elementos que se encuentran en la diagonal principal y las paralelas, luego se suman dichos productos :

$$\begin{array}{|ccc|} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ \end{array} = (aei + dhe + gbf)$$
$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array}$$

3° Se calculan los productos de los elementos que se encuentran en la otra diagonal y sus palabras, para luego sumar dichos productos :

$$|\Delta| = \begin{array}{|ccc|} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \\ \end{array} = (ceg + afh + bdi)$$
$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ d & e & f \end{array}$$

4° Se calcula la diferencia de los números obtenidos en los pasos (2°) y (3°):

$$|A| = (aei + dhc + gbf) - (ceg + afh + bdi)$$

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, calcular $|A|$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = (-4 - 24 + 12) = -16 \end{matrix} \qquad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} \begin{matrix} \\ \\ = (-9 + 32 - 4) = 19 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{matrix} \qquad\qquad\qquad \begin{matrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & -1 & 4 \end{matrix}$$

Restando obtenemos: $|\Delta| = -16 - 19 = -35$

Ejercicios de Aplicación

1. Escribir explícitamente la matriz "A".
$A = (a_{ij})_{3x2}$ / $a_{ij} = i + 2j$

a) $\begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 6 & 8 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 0 & 0 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ e) N.A.

2. Si : $\begin{bmatrix} x+y & 2z+w \\ x-y & z-w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$. Halle : "(x + 2y) – (z + w)"

a) 4 b) -3 c) 2
d) 3 e) -2

3. Dado : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$. Calcular : "2A - 3B"

a) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & -9 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} -4 & -2 \\ -5 & 9 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -5 & 9 \\ 7 & 5 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -2 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$

4. Determinar $P_{(A)}$ si : $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ además : $P_{(x)} = 2x + 31$. Dar la suma de elementos de $P_{(A)}$.

a) 10 b) 5 c) 12
d) 14 e) 120

5. Si : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix}$. Hallar "AB"

a) $\begin{bmatrix} 14 & -1 & 12 \\ 9 & 0 & 7 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 12 & 0 & 3 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 4 \end{bmatrix}$

6. Dada la matriz : $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$. Calcular "$A^2 - 4A$"

a) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} -5 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} -5 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$

7. Si : $A^2 = B^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$; $AB = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Hallar : $(A + B)^2$

a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}$

8. Si : $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 5 & 9 \end{bmatrix}$, hallar la matriz "X" que resuelve la ecuación : AX = B. Dar como respuesta la suma de sus elementos.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 6

9. Dadas las matrices : $A = \begin{bmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$;

$C = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 8 & 5 \end{vmatrix}$. Entonces se cumple que :

a) $|A| < |B| < |C|$
b) $|A| < |C| < |B|$
c) $|B| < |C| < |A|$
d) $|B| < |A| < |C|$
e) $|C| < |B| < |A|$

10. Indicar el valor de verdad de cada una de las siguientes afirmaciones :

I. $\begin{vmatrix} a^2 & ab \\ ab & b^2 \end{vmatrix} = 2a^2b^2$

II. $\begin{vmatrix} n+1 & n \\ n & n-1 \end{vmatrix} = -1$

III. $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix} = 4ab$

a) VVV
b) VVF
c) FVV
d) FVF
e) VFV

11. Si : $(1 + x)(1 - x) = y^2$. Calcular :

$E = \begin{vmatrix} x & -y \\ y & x \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -y & -1 \\ xy & x \end{vmatrix}$

a) 0
b) -1
c) 1
d) 2
e) -2

12. Si : $A = \begin{vmatrix} \text{Log}_2 32 & \text{Log}_3 27 \\ \text{Log}_4 16 & \text{Log}_5 125 \end{vmatrix}$. Calcular : $|A|$

a) 15
b) 13
c) 8
d) 7
e) 9

13. Dada la matriz : $H = \begin{vmatrix} x^2 & -3 \\ x & 1 \end{vmatrix}$, si $|H| = 4$.

Hallar H^2

a) $\begin{vmatrix} 268 & -51 \\ -68 & 13 \end{vmatrix}$
b) $\begin{vmatrix} 244 & -45 \\ -68 & 11 \end{vmatrix}$
c) $\begin{vmatrix} 268 & -45 \\ -68 & 13 \end{vmatrix}$
d) $\begin{vmatrix} 244 & -51 \\ -60 & 13 \end{vmatrix}$
e) $\begin{vmatrix} 268 & -45 \\ -68 & 11 \end{vmatrix}$

14. Si "x" satisface la ecuación :

$x + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$. Calcular el valor de :

E = Traza (x) + $|x|$

a) -39
b) 32
c) -7
d) 25
e) 30

15. Dadas las matrices: $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; $B = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 3 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Calcular el valor de : $E = 2|A| + 3|B|$

a) 71
b) 36
c) 72
d) 17
e) 24

Tarea Domiciliaria Nº3

1. Dada la matriz : $A = \begin{bmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \\ -3 & 0 & 5 \end{bmatrix}$, calcular el valor de : $E = a_{12} + a_{22}^2 + a_{33}$

a) 12
b) 16
c) 4
d) -4
e) -1

2. Si : $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & 3 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3y & 6y \\ -2z & -1 \end{bmatrix}$ y A = B.

Calcular el valor de : E = 4x + 2y - z

a) 6
b) 8
c) 13
d) 9
e) 5

3. Si : $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$; $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ y $C = 2A + 3B$

Hallar traza (C)

a) 18 b) 20 c) 22
d) 24 e) 26

4. Dada la matriz: $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ y el polinomio $P(x) = 5x - 2$. Hallar la suma de los elementos de $P(A)$.

a) -69 b) 20 c) 69
d) -20 e) 49

5. Dadas las matrices: $A = \begin{bmatrix} 2x-1 & y \\ 3-y & 2 \end{bmatrix}$;

$B = \begin{bmatrix} 5-y & 2-x \\ x+1 & 2 \end{bmatrix}$; $C = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$, si : $A = B$.

Calcular : $A + C$

a) $\begin{bmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 7 & 5 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 3 & 9 \end{bmatrix}$

6. Dadas las matrices:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 \end{bmatrix}; \qquad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -5 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Hallar "AB"

a) 19 b) -37 c) -19
d) 37 e) -25

7. Resolver la ecuación:

$$\begin{bmatrix} a^2 & a & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 5 \\ 6 \end{bmatrix} = [0]$$

a) S = {-2, 3} d) S = {-2}
b) S = {2, -3} e) S = {-3}
c) S = {-2, -3}

8. Calcular $(A + B)^2$, si se sabe que: $A^2 = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$

$B^2 = \begin{bmatrix} 3 & -6 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}$; $AB = \begin{bmatrix} 4 & -8 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$; $BA = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

a) $\begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 11 & 10 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 11 & -1 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} 10 & -12 \\ 11 & -1 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & -6 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} 10 & -12 \\ -1 & 11 \end{bmatrix}$

9. Si: $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. Calcular $|A^4|$

a) 32 b) 64 c) 128
d) 256 e) 300

10. Si: $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$. Calcular: $E = |2A + 3A^t|$

a) 354 b) 48 c) 306
d) -256 e) -306

11. Si la matriz X satisface la ecuación:

$X + 2\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$. Hallar $|X|$

a) -24 b) -15 c) 9
d) -9 e) -33

12. Si: $A^2 = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$ y $B^2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$. Calcular el determinante de: $C = (A + B)(A - B)$

a) 2 b) 4 c) -2
d) -4 e) 0

13. Dada la matriz: $A = \begin{vmatrix} 2x^2 & x \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$, si : $|A| = 3$.

Hallar: $|2A + 3A^t|$

a) 100 b) -125 c) 25
d) -100 e) N.A.

14. Si: $A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix}$. Calcular : $|A|$

a) 40 b) 20 c) 30
d) 0 e) 10

15. Dada la matriz: $B = \begin{vmatrix} x & -3 & 5 \\ 3 & -2 & x+4 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}$, si $|B| =$ 100 ¿Cuál es el valor de x?

a) 7 b) 6 c) 4
d) 2 e) 1