



RECURSOS DIDÁCTICOS

QUINTO DE SECUNDARIA

ÁLGEBRA

PROPIEDADES CON LAS RAICES



Ecuaciones de Segundo Grado II

Naturaleza de Raíces

depende

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

Discriminante

si

$$\Delta > 0$$

Raíces reales diferentes

$$x_1 \neq x_2$$

$$\Delta = 0$$

Raíces iguales

$$x_1 = x_2$$

$$\Delta < 0$$

Raíces complejas y conjugadas

$$x_1 = m + ni$$

$$x_2 = m - ni$$

$m, n \in \mathbb{R}$
además:
 $i = \sqrt{-1}$

$$\Delta \geq 0$$

Raíces reales

Propiedades de las Raíces

suma

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

producto

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Diferencia

$$x_1 - x_2 = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

Formación de la Ecuación

se debe tener

Suma = S

$$S = \frac{-b}{a}$$

Producto = P

$$P = \frac{c}{a}$$

donde

$$x^2 - Sx + P = 0$$





Observaciones

Raíces Simétricas u Opuestas

si

Una raíz es: $x_1 = m$, la otra es: $x_2 = -m$

se cumple

$$x_1 + x_2 = 0$$

Raíces Recíprocas o Inversas

si

Una raíz es: $x_1 = m$, la otra es: $x_2 = \frac{1}{m}$

se cumple

$$x_1 x_2 = 1$$

Ecuaciones Cuadráticas Equivalentes

si las ecuaciones

$$ax^2 + bx + c = 0; a \neq 0$$

$$mx^2 + nx + p = 0; m \neq 0$$

tienen

Las mismas raíces o soluciones

se cumple

$$\frac{a}{m} = \frac{b}{n} = \frac{c}{p}$$



Ejercicios Resueltos

1. **Ejemplo:** En la ecuación $x^2 + 6x + 5 = 0$

Calculamos el DISCRIMINANTE:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (6)^2 - 4(1)(5)$$

$$\Delta = 16, \text{ es decir } \Delta > 0$$

◆ Por la fórmula General: $x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$

$$x = \frac{-6 \pm \sqrt{16}}{2(1)}$$

◆ De donde: $x_1 = \frac{-6+4}{2} = -1$; $x_2 = \frac{-6-4}{2} = -5$

es decir C.S. = $\{-1; -5\}$ raíces reales y diferentes!

2. **Ejemplo:** En la ecuación $x^2 - 14x + 49 = 0$

◆ Calculamos el DISCRIMINANTE:

$$\Delta = b^2 - 4ac$$

$$\Delta = (-14)^2 - 4(1)(49)$$

$$\Delta = 196 - 196$$

$\Delta = 0$, entonces las raíces son reales e iguales.

◆ Comprobemos:

La ecuación dada también se escribe así:

$$(x - 7)^2 = 0 \quad \text{ó} \quad (x - 7)(x - 7) = 0$$

Igualando cada factor a CERO:

$$x - 7 = 0 \quad \rightarrow \quad x_1 = 7$$

$$x - 7 = 0 \quad \rightarrow \quad x_2 = 7$$

entonces: C.S. = $\{7; 7\}$

3. **Ejemplo:** En la ecuación $x^2 - 6x + 25 = 0$

◆ Los coeficientes son: $a = 1$; $b = -6$; $c = 25$

El DISCRIMINANTE es: $\Delta = b^2 - 4ac$

$$\Delta = (-6)^2 - 4(1)(25)$$

$$\Delta = -64, \text{ es}$$

decir $\Delta < 0$

Lo que significa que las raíces no son reales, sino COMPLEJAS Y CONJUGADAS.

4. **Ejemplo:** Indicar la suma y producto de raíces

de: $x^2 + 5x + 3 = 0$

Solución:

Identificamos: $a = 1$; $b = 5$; $c = 3$

Entonces: $S = -\frac{b}{a} = \text{suma de raíces}$

$$S = -\frac{5}{1} = -5$$

$P = \frac{c}{a} = \text{producto de raíces}$

$$P = \frac{3}{1} = 3$$

5. **Ejemplo:** Formar la ecuación de segundo grado si se tienen las raíces $x_1 = 2$; $x_2 = -3$.

Solución:

Sabemos:

$$S = x_1 + x_2 = 2 - 3 = -1$$

$$P = x_1 x_2 = (2)(-3) = -6$$

entonces de la ecuación:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

$$x^2 - (-1)x + (-6) = 0$$

$$x^2 + x - 6 = 0 \text{ Ecuación de 2º Grado}$$



6. **Ejemplo:** Hallar las raíces de la ecuación e indicar que tipo de raíces tiene: $x^2 - 100 = 0$

Solución:

$$\text{Factorizando} \\ (x + 10)(x - 10) = 0$$

$$x = -10 \quad x = 10$$

Son simétricos



EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Indicar la suma y producto de raíces de cada una de las ecuaciones:

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

b) $x^2 + x + 1 = 0$

c) $5x^2 + 2x + 3 = 0$

d) $7x^2 + 2x - 1 = 0$

e) $3x^2 - 2x + 5 = 0$

f) $x^2 + 8x + 9 = 0$

2. Indicar de que naturaleza son las raíces de las ecuaciones siguientes:

a) $x^2 + 2x + 1 = 0$

Rpta.: _____

b) $x^2 + 1 = 0$

Rpta.: _____

c) $x^2 + 5x + 2 = 0$

Rpta.: _____

d) $x^2 - 1 = 0$

Rpta.: _____

e) $x^2 - x + 1 = 0$

Rpta.: _____

f) $5x^2 + 3x + 1 = 0$

Rpta.: _____

g) $7x^2 + 4x - 2 = 0$

Rpta.: _____

h) $2x^2 + 3x - 3 = 0$

Rpta.: _____

3. Si: x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 + 5x + 1 = 0$$

Indicar el valor de:

$$E = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2$$

- a) 20 b) 21 c) 23
d) 24 e) 25

4. Hallar "m", si la suma de raíces de la ecuación es 10.

$$(m - 2)x^2 - (m + 5)x + 8 = 0$$

- a) 25 b) 25/9 c) 9/25
d) 1/4 e) N.A.

5. Dada la ecuación: $9x^2 + 5x + 1 = 0$ con raíces " x_1 " y " x_2 "; calcular "k".

$$\text{Si: } 3(x_1x_2)^{k-4} = 1$$

- a) 9/2 b) 7/2 c) 5/2
d) 4 e) 9

6. En la ecuación $3x^2 + 2ax + a^2 - 6 = 0$, ¿para qué valor de "a" las raíces serán iguales? (Raíz doble)

- a) ± 1 b) ± 2 c) ± 3
d) ± 4 e) N.A.

7. Si una de las raíces de la ecuación:

$$x^2 + (a + 3)x + a + 2 = 0$$
 es (-6), entonces la otra raíz es:

- a) -2 b) -1 c) -3
d) -4 e) N.A.

8. Si la ecuación:

$$(b + 5)x^2 + 3bx + b = 0$$

presenta raíces iguales. Hallar: "b"

- a) 0 b) -2 c) 4
d) 8 e) 6

9. Si la ecuación:

$$x^2 + 3x + 6k - 1 = 0$$

no tiene solución real, entonces se cumple:

- a) $k > \frac{5}{24}$ b) $k > \frac{13}{24}$ c) $k > \frac{25}{4}$
d) $k > \frac{13}{24}$ e) N.A.

10. Indique los valores de k si en la ecuación:

$x^2 - (k + 2)x + k + 1 = 0$ su discriminante es igual a la suma de sus raíces.

- a) 1 ; 2 b) -2 ; 1/2 c) 2 ; -1
d) -1/2 ; 1 e) -2 ; -1

11. Formar las ecuaciones de 2º grado a partir de las raíces x_1 y x_2 .

a) $x_1 = 3$; $x_2 = 1$

Rpta.: _____

b) $x_1 = 5$; $x_2 = -2$

Rpta.: _____

c) $x_1 = -3$; $x_2 = -4$

Rpta.: _____

d) $x_1 = -2$; $x_2 = 2$

Rpta.: _____

e) $x_1 = \sqrt{3}$; $x_2 = 2\sqrt{3}$

Rpta.: _____

f) $x_1 = 2 + \sqrt{3}$; $x_2 = 2 - \sqrt{3}$

Rpta.: _____

12. Sean las ecuaciones equivalentes:

$$x^2 + ax + 15 = 0 \dots\dots\dots \text{(I)}$$

$$3x^2 + 2x + b = 0 \dots\dots\dots \text{(II)}$$

Indicar: "a . b"

- a) 45/3 b) 30 c) 35
d) 2/3 e) 25/3

13. Calcular "a/b", si las ecuaciones:

$$2ax^2 - (8b - 3)x + 18 = 0$$

$$x^2 + (b + 5)x + 6 = 0$$

son equivalentes (tienen las mismas raíces).

- a) $\frac{1}{6}$ b) $-\frac{3}{2}$ c) $-\frac{1}{2}$
 d) $-\frac{9}{2}$ e) $-\frac{2}{9}$

14. Hallar el valor de "k" que hace la suma de las raíces de la ecuación:

$$x^2 + kx + 2x - k^2 + 4 = 0$$

sea igual al producto de las mismas. ($k < 0$)

- a) -3 b) -2 c) 0
 d) -1 e) N.A.

15. Hallar el valor de "k" en la ecuación:

$$(k - 1)x^2 - 5x + 3k - 7 = 0$$

para que una de las raíces de la ecuación sea la inversa multiplicativa de la otra.

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 6



Ejercicios Adicionales



1. Hallar el valor de "a" de modo que las raíces de la ecuación:

$$x^2 - (a+3)x + \frac{a^2}{4} + 1 = 0 \text{ se difieren en } 5.$$

- a) 5/3 b) 7/3 c) 10/3
 d) 5/6 e) 20/3

2. Indicar la suma de las raíces que verifican la ecuación:

$$x^2 - 6x + 9 = 4\sqrt{x^2 - 6x + 6}$$

- a) 12 b) 16 c) 15
 d) 18 e) 13

3. Formar la ecuación de segundo grado, si tiene por raíces:

$$M \pm \sqrt{M^2 - 1}$$

- a) $2x^2 - Mx + 2 = 0$ d) $2x^2 - 2Mx + 2 = 0$
 b) $2x^2 - 4Mx + 2 = 0$ e) $2x^2 - Mx + 1 = 0$
 c) $2x^2 - 2Mx + 1 = 0$

4. Sean "S" y "P" la suma y el producto de raíces de la ecuación de incógnita "x":

$$(k - a)(x^2 - x) = -(k + a)$$

Si: $S < P$; son números consecutivos. Hallar "k" en función de "a".

- a) -a b) 2a c) a
 d) 3a e) $\frac{3a}{2}$

5. Los límites hacia los que tienden las raíces de la ecuación:

$$(a - 2)x^2 - (7a - 2)x + 6a = 0$$

cuando "a" crece indefinidamente.

- a) 1 y 6 b) 2 y 3 c) 1 y 3
 d) 2 y 6 e) N.A.

6. Siendo: $\left\{ \frac{2n-1}{n-1}; \frac{2n+3}{n+1} \right\}$ el conjunto solución de la ecuación cuadrática en "x":

$$ax^2 + 2bx + 4c = 0 \quad (a \neq 0)$$

Calcular el valor de: $L = \frac{b^2 - 4ac}{(a+b+c)^2}$

7. Sabiendo que $x_1 \wedge x_2$ son las raíces de la ecuación: $x^2 - 5x + 1 = 0$

$$\text{Reducir: } N = \frac{x_1^2 + x_2^{-2}}{x_1^4 + x_1^2 + x_2^{-2} + x_2^{-4}}$$

TAREA DOMICILIARIA N° 5

1. Indicar la suma y producto de raíces de cada una de las ecuaciones:

- a) $x^2 + 3x + 1 = 0$ d) $2x^2 + 5x + 1 = 0$
 b) $x^2 + 5x + 2 = 0$ e) $x^2 + 7x + 6 = 0$
 c) $3x^2 + 4x + 1 = 0$

2. Indicar de que naturaleza son las raíces de las ecuaciones siguientes:

- a) $x^2 - ax + 1 = 0$ e) $5x^2 + 2x + 1 = 0$
 b) $x^2 + x + 2 = 0$ f) $x^2 - 25 = 0$
 c) $x^2 + 5x + 1 = 0$ g) $x^2 + 3x = 0$
 d) $x^2 - 7x + 2 = 0$ h) $3x^2 - 7x + 1 = 0$

3. Siendo x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación:

$$x^2 + 4x + 1 = 0$$

Indicar el valor de: $A = \left(\frac{x_1 + x_2}{3x_1x_2} \right)^{-1}$

- a) 4/3 b) -4/3 c) 1/3
 d) -1/3 e) -3/4

4. Sea x_1 y x_2 raíces de la ecuación:

$$x^2 + 2ax + a^2 = 0$$

Indicar: $\frac{(x_1 + x_2)^2 + 2x_1x_2}{3x_1x_2}$

- a) 4 b) -2 c) 3
 d) 2 e) 1

5. Hallar "k", si la suma de raíces de la ecuación es 20.

$$(k - 3)x^2 - (k + 4)x + 30 = 0$$

- a) $\frac{64}{3}$ b) $\frac{67}{9}$ c) $\frac{19}{64}$
 d) $\frac{64}{19}$ e) $-\frac{19}{64}$

6. Indicar el valor de "m" si el producto de raíces es igual a la suma de las mismas en la ecuación: $(m + 4)x^2 - 2mx + 3m + 1 = 0$

- a) 1/2 b) -2/3 c) 2/3
 d) 1/3 e) -1/2

7. Hallar "m", si la ecuación presenta raíz doble.

$$x^2 - (m + 1)x + 25 = 0$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 9 e) 10

8. Hallar "m", si la suma de raíces de la ecuación es 8.

$$(m + 2)x^2 - (7m + 6)x + 4m + 5 = 0$$

- a) -1 b) -2 c) -6
 d) -10 e) -12

9. Hallar "m", si el producto de raíces es 16.

$$(m + 1)x^2 - (m + 5)x + 10m + 4 = 0$$

- a) -1 b) -2 c) -3
 d) -4 e) -10

10. Hallar "m", si la ecuación tiene por raíz a la unidad, $m > 0$.

$$4x^2 - 4x + m^2 - m - 2 = 0$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 6

11. Dadas las ecuaciones:

$$mx^2 + 5x + 10 = 0 \dots\dots\dots(I)$$

$$2x^2 + nx + 2 = 0 \dots\dots\dots(II)$$

Equivalentes (tienen las mismas raíces)

Indicar el valor de: $E = m + n$

- a) 10 b) -10 c) -11
 d) 11 e) 3

12. Indicar el valor de "p" si una de las raíces es la inversa multiplicativa de la otra.

$$(p + 2)x^2 - 3x + 2p + 1 = 0$$

- a) -1 b) 1 c) 2
 d) 3 e) 4

13. Hallar "a" si la ecuación presenta raíces simétricas: $x^2 + (a - 2)x + a^2 + b = 0$

Siendo: $b > 5$

- a) 1 b) 3 c) 4
 d) -1 e) 2

14. Sea la ecuación: $5x^2 - 2x + 3 = 0$

Donde: " x_1 " y " x_2 " son sus raíces

$$\text{Calcular: } M = (1 + x_1)(1 + x_2)$$

- a) 1 b) 2 c) 3
 d) 4 e) 5

15. Formar las ecuaciones de 2º Grado a partir de las raíces dadas x_1 y x_2 .

- a) $x_1 = -2$ $x_2 = -1$
 b) $x_1 = 3$ $x_2 = 4$
 c) $x_1 = 5$ $x_2 = 3$
 d) $x_1 = -\sqrt{2}$ $x_2 = \sqrt{3}$
 e) $x_1 = \sqrt{3}$ $x_2 = -\sqrt{3}$
 f) $x_1 = 6$ $x_2 = -1$