GEOMETRÍA DEL ESPACIO

NOCIONES BÁSICAS

❖ **INTRODUCCIÓN**

Hasta el momento conocemos figuras geométricas ubicadas solo en un plano tales como el triángulo, el cuadrilátero, la circunferencia, etc. Sin embargo en nuestra vida cotidiana observamos que en nuestro entorno existen objetos que no están ubicados en un solo plano tales como una caja una columna, un edificio, etc, esto nos hace ver la necesidad de analizar la forma y extensión de los objetos ubicados en el espacio, lo cual se puede hacer representándolos mediante figuras geométricas espaciales denominados sólidos geométricos para esto también será necesario tener un manejo adecuado de las rectas planos, ángulos diedros, etc. Y sobre todo paciencia, orden y perseverancia por parte del alumnado.

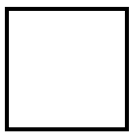


Figura en el plano

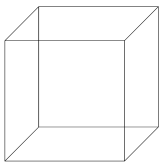


Figura en el Espacio

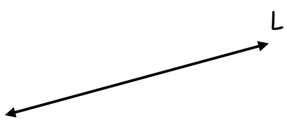
❖ **RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO**

NOCIONES BÁSICAS.-

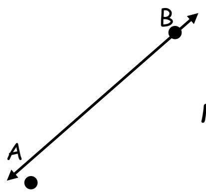
Representación gráfica de un punto

Notación. **-** Punto A

Representación gráfica de una recta



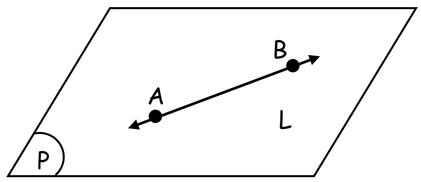
Notación. **-** Recta L



Notación. **-** Recta AB ó $\overleftrightarrow{AB}$

PLANO

Se denomina superficie plana o plano a una superficie tal que la recta que une a dos puntos cualesquiera tiene todos sus otros puntos en la misma superficie todo plano se supone de extensión ilimitada, la mayor parte de los objetos planos que observamos son porciones de plano de forma rectangular por esta razón y ante la imposibilidad de representar los planos indefinidos adoptaremos la representación convencional por regiones paralelográmicas que es el aspecto que tiene aproximadamente los rectángulos vistos en perspectiva desde cierta distancia.

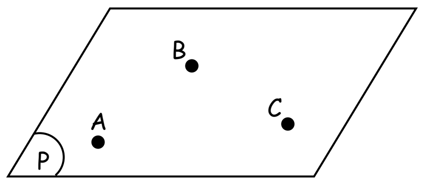


Notación. **-** Plano P : ▱ P

➢ **DETERMINACIÓN DE UN PLANO**

Un plano P queda determinado en uno de los 4 casos.

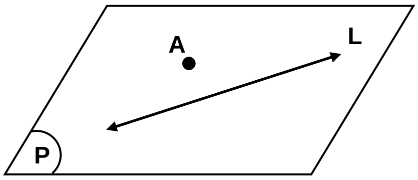
1. **Teorema**.- Tres puntos no colineales determinan un plano.



Si: A, B, C son puntos no colineales.

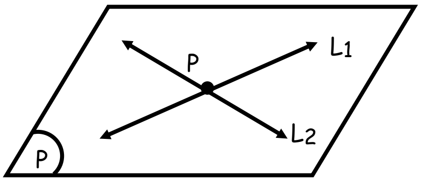
$\Rightarrow$ A, B y C determina el plano P

2. **Teorema**.- Una recta y un punto que no pertenece a ella determinan un plano.



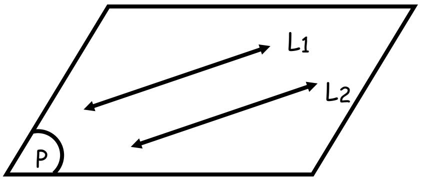
Si : $A \notin L \Rightarrow$ $\boxed{A \text{ y } \overleftrightarrow{L} \text{ determina al plano P}}$

3. **Teorema**.- Dos rectas secantes determinan un plano.



Si: $\overleftrightarrow{L_1} \cap \overleftrightarrow{L_2} = \{P\} \Rightarrow$ $\boxed{\overleftrightarrow{L_1} \text{ y } \overleftrightarrow{L_2} \text{ determinan el plano P.}}$

4. **Teorema**.- Dos rectas paralelas determinan un plano.

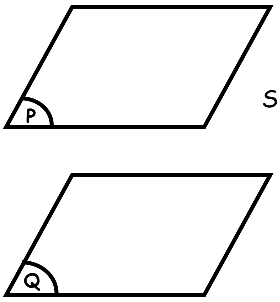


Si: $\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2} \Rightarrow$ $\boxed{\overleftrightarrow{L_1} \,//\, \overleftrightarrow{L_2} \text{ determinan el plano P.}}$

❖ POSICIONES RELATIVAS DE DOS PLANOS

A. PLANOS PARALELOS

Dos planos son paralelos o paralelos entre si cuando no tienen un punto en común es decir no se intersectan.



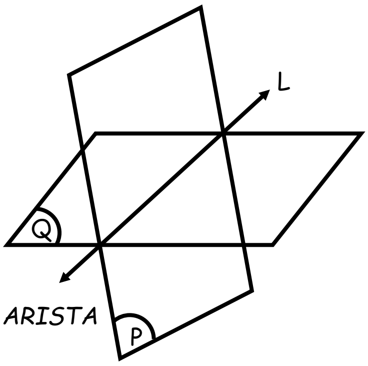
Si : $\square P \cap \square Q = \varnothing \Rightarrow$

$\boxed{\square P \,//\, \square Q}$

$\varnothing$ = Vació ó Nulo

B. PLANOS SECANTES

Son dos planos que tienen una recta en común denominado arista o traza de un plano sobre el otro.



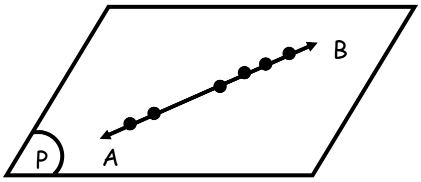
Si: $\square P \cap \square Q = \overleftrightarrow{L} \Rightarrow$

$\boxed{\square P \text{ y } \square Q \text{ son secantes}}$

❖ POSICIONES RELATIVAS DE UNA RECTA Y UN PLANO

1. Recta Contenida en un Plano

Una recta esta contenida en un plano cuando todos los puntos de dicha recta pertenecen al plano.

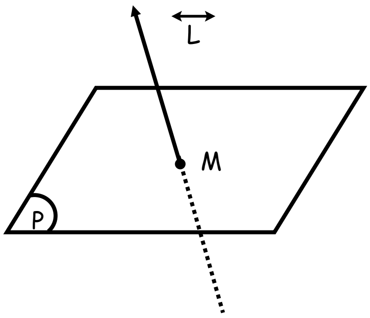


Observación.-
Si dos puntos de una recta pertenecen a un plano dicha recta está contenida en dicho plano

Si: $A \in \square P$ y $B \in \square P \Rightarrow$ $\boxed{\overleftrightarrow{L} \subset \square P}$

2. Recta Secante al Plano

Una recta se denomina secante a un plano si sólo tiene un punto en común con el plano, al cual se le denomina punto de intersección o traza de la recta sobre el plano.

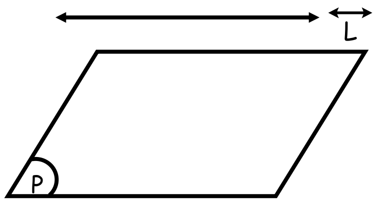


Punto M: Pie de la recta secante

Si: $\overleftrightarrow{L} \cap \square P = \{M\} \Rightarrow \boxed{\overleftrightarrow{L} \text{ y } \square P : \text{Secante}}$

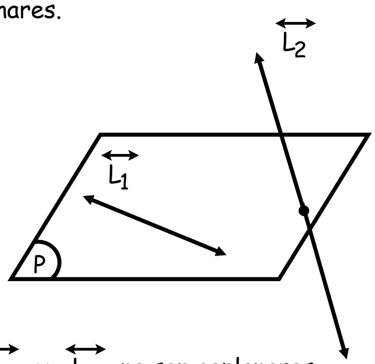
3. Recta Paralela a un Plano

Una recta y un plano son paralelas si no tienen ningún punto en común.



Si: $\overleftrightarrow{L} \cap \square P = \varnothing \Rightarrow \boxed{\overleftrightarrow{L} \,//\, \square P}$

Observación.-
Rectas alabeadas o cruzadas.- son rectas no coplanares.

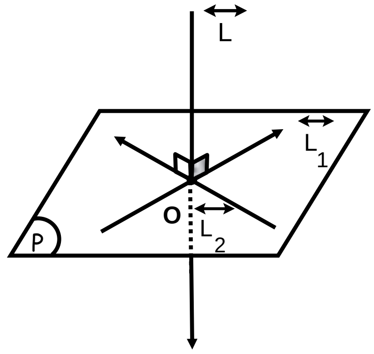


Si: $\overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L_2}$ no son coplanares.

$\boxed{\Rightarrow \overleftrightarrow{L_1} \text{ y } \overleftrightarrow{L_2} \text{ son alabeadas o cruzadas}}$

Teorema.-

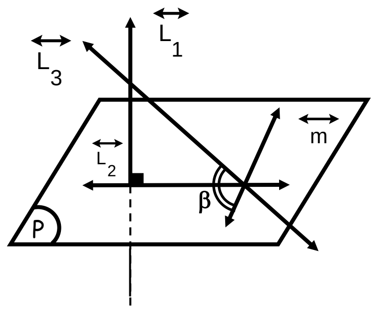
Si una recta es perpendicular a dos rectas, entonces dicha recta es perpendicular al plano que determinan las rectas dadas.



Si: $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_1}$ y $\overleftrightarrow{L} \perp \overleftrightarrow{L_2}$

$\Rightarrow \boxed{\overleftrightarrow{L} \perp \square P}$

Teorema de las Tres Perpendiculares



Si: $\overleftrightarrow{L_1} \perp \square P$ y $\overleftrightarrow{L_2} \perp \overleftrightarrow{m}$ ($\overleftrightarrow{m} \subset \square P$)

$\boxed{\Rightarrow \overleftrightarrow{m} \perp \overleftrightarrow{L_3} \quad \therefore\ \beta = 90^o}$

Ejercicios de Aplicación

1. Indicar verdadero o falso.

   I. Una recta y un punto que no pertenece a ella determina un plano.
   II. Dos rectas secantes no forman un plano.
   III. Dos rectas paralelas determinan un plano.

   a) VFV b) VVV c) FVF
   d) FFF e) VFF

2. Indica verdadero o falso.

   I. Tres puntos cualquiera determinan un plano.
   II. Una recta y un punto determinan una plano.
   III. Dos puntos no colineales forman un plano.

   a) VVV b) VFF c) FFF
   d) FVV e) VFV

3. Indicar verdadero o falso.

   I. La intersección de un plano y una esfera nos da un círculo.
   II. Una recta esta contenida en un plano cuando todos los puntos de dicha recta pertenecen al plano.
   III. Todo plano tienen porciones limitadas

   a) VFV b) FFV c) VFF
   d) VVV e) VVF

4. Calcular el máximo número de planos que determinan 5 puntos no colineales en el espacio.

   a) 4 b) 6 c) 8
   d) 10 e) 15

5. ¿Cuántos planos como mínimo forman 6 rectas paralelas?

   a) 5 b) 10 c) 15
   d) 20 e) 25

6. ¿Cuántos planos como máximo forman 15 rectas paralelas?

   a) 35 b) 55 c) 85
   d) 105 e) 120

7. Con 10 puntos no colineales; ¿Cuántos planos como máximo se pueden determinar?

   a) 100 b) 110 c) 120
   d) 130 e) 140

8. Con 14 puntos no colineales. ¿Cuántos planos como máximo se pueden determinar?

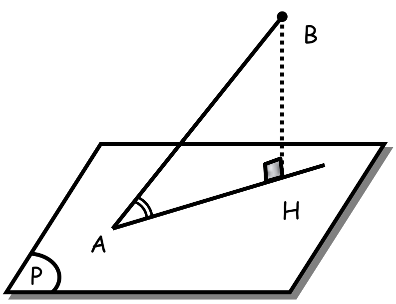
   a) 364 b) 286 c) 324
   d) 484 e) 268

9. Se tiene dos cuadrados ABCD y ABEF ubicadas en planos perpendiculares y cuyos centros son P y Q respectivamente. Calcular la distancia PQ si AB = 4.

   a) 2 b) $2\sqrt{2}$ c) $\sqrt{2}$
   d) $3\sqrt{2}$ e) $5\sqrt{2}$

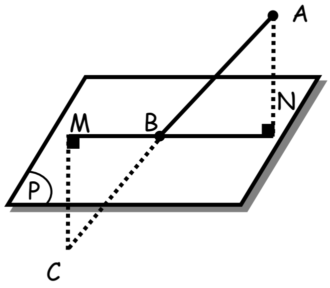
10. Calcular la proyección de $\overline{AB}$, sobre el plano "P"; si "A" pertenece al plano "P". AB = 50 y BH = 48.

   a) 7
   b) 14
   c) 16
   d) 18
   e) 24



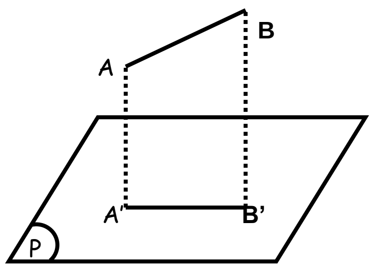
11. Calcular la proyección de $\overline{AC}$ sobre el plano "Q", si "B" pertenece al plano "Q" , si "B" pertenece al plano "Q" , AN = 4 , MC = 6 y AC = 26.

a) 12
b) 24
c) 13
d) 26
e) 10



12. En la figura A'B' = 12 la diferencia de las distancias de B y A al plano P es 5. Hallar $\overline{AB}$.

a) 10
b) 11
c) 12
d) 13
e) 15



13. Se tiene un plano Q, un segmento de recta $\overline{AB}$ de 8m situado en el plano y un punto "P" que dista 12m del plano. Hallar la distancia de $\overline{AB}$ al pie de la distancia mencionada, si AP = BP = 13m.

a) 2 b) 3 c) 4
d) 5 e) 5,2

14. La recta L de intersección de 2 planos X e Y perpendiculares entre si es paralelo a una recta R del plano X y a una recta S del plano Y la distancia entre R y L es 8m y entre L y S es 15m. Calcular la distancia entre R y S.

a) 10m b) 12m c) 15m
d) 17m e) 19m

15. Se tiene un cuadrado ABCD de lado 7m, se levanta por C la perpendicular CE. Si $\overline{EB}$ mide 25m. Calcular: $\overline{CE}$ + $\overline{ED}$.

a) 24 b) 25 c) 49
d) 50 e) 59

Tarea Domiciliaria

1. Indicar verdadero o falso
   I. Dos planos son paralelos entre si no tienen punto en común.
   II. Una recta esta contenida en un plano cuando al menos un punto de dicha recta pertenece al plano.
   III. Una recta es paralela a un plano si no tiene un punto en común.

a) VVF b) VFV c) VFF
d) VVV e) FVV

2. Indicar verdadero o falso.
   I. Una recta es secante a un plano si solo se tiene un punto en común.
   II. Dos rectas no coplanares son rectas llamadas alabeadas.
   III. Rectas paralelas son rectas coplanares que tienen un punto en común.

a) VVF b) VFF c) FVV
d) FFV e) VVV

3. Con 8 puntos no colineales cuantos planos como máximo se pueden determinar.

a) 50 b) 55 c) 56
d) 60 e) 62

4. Con 12 puntos no colineales cuantos planos como máximo se pueden determinar.

a) 200 b) 210 c) 220
d) 240 e) 250

5. Con 32 puntos no colineales cuantos planos como máximo se pueden determinar.

a) 4000 b) 4300 c) 4960
d) 4980 e) 4990

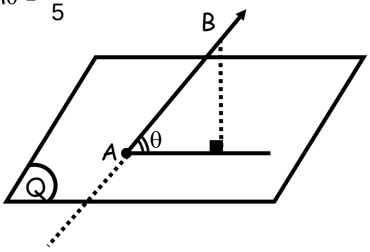
6. Se tiene dos cuadrados ABCD y ABEF ubicados en planos perpendiculares y cuyos centros son P y Q respectivamente. Calcular la distancia PQ; si: AB = 6.

a) 5 b) $3\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{3}$
d) $5\sqrt{2}$ e) $6\sqrt{2}$

7. Se tiene un rectángulo ABCD donde $\overline{AD}$ = 5, $\overline{CD}$ =4, si del punto D se levanta una perpendicular $\overline{DE}$. Calcular $\overline{EC}$ sabiendo que $\overline{AE}$ = 13.

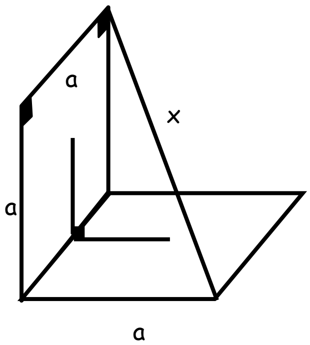
a) $\sqrt{10}$ b) $2\sqrt{10}$ c) $3\sqrt{10}$
d) $4\sqrt{10}$ e) $5\sqrt{10}$

8. De la figura, calcular la proyección $\overline{AB}$ al plano Q Si : Senθ = $\frac{3}{5}$



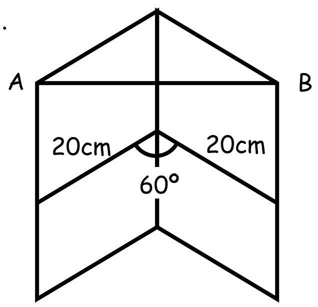
a) 3
b) 4
c) 5
d) 4,5
e) 3,5

9. De la figura calcular : x



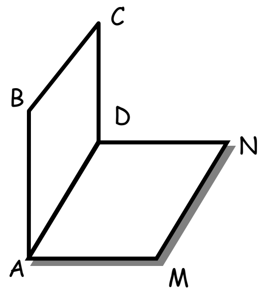
a) a
b) $a\sqrt{2}$
c) $2a\sqrt{2}$
d) $a\sqrt{3}$
e) $2a\sqrt{3}$

10. Al caer un libro del 4to año de secundaria quedo en la siguiente posición. Calcular la distancia $\overline{AB}$.



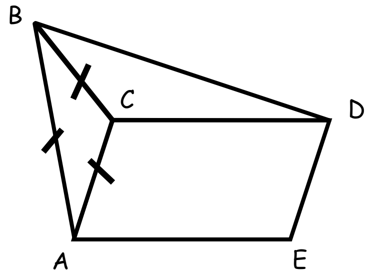
a) 10cm
b) 15
c) 20
d) 25
e) 28

11. Calcular BN, si los cuadrados ABCD y ADNM son perpendiculares Si: MN = $18\sqrt{2}$.



a) 18
b) 16
c) $18\sqrt{2}$
d) $18\sqrt{6}$
e) $36\sqrt{3}$

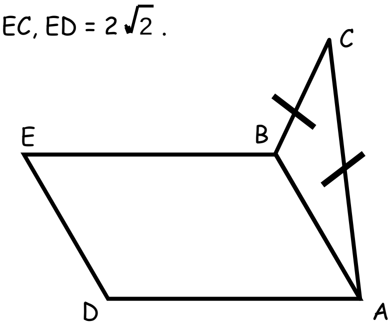
12. Del gráfico, el ΔABC es perpendicular al plano del cuadrado ACDE. Calcular BD; AB = 2.



a) 2
b) $2\sqrt{2}$
c) $3\sqrt{3}$
d) $\sqrt{3}$
e) 4

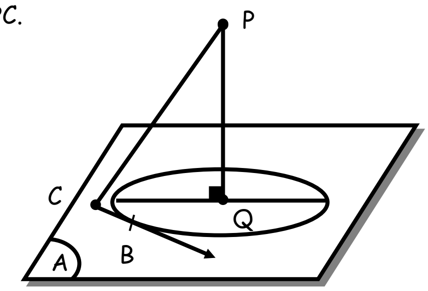
13. Del gráfico, el plano ABC es perpendicular al plano del cuadrado ABED.

Calcular: EC, ED = $2\sqrt{2}$.



a) 2
b) 4
c) 6
d) $2\sqrt{2}$
e) $4\sqrt{2}$

14. En la figura $\overline{PQ}$ es perpendicular al plano "A", "Q" es centro de la circunferencia de radio 6, y "B" es punto de tangencia, si BC = 10 y PQ = 8. Calcular PC.



a) 6
b) 8
c) 10
d) $10\sqrt{2}$
e) $16\sqrt{2}$

15. Se tiene un cuadrado ABCD luego se levanta una perpendicular por el vértice "A" al plano del cuadrado. Hasta el punto "P". Calcular "PO". Si: AB = $4\sqrt{2}$ y AP = 4, (O = centro del cuadrado).

a) 4 b) $4\sqrt{2}$ c) 8
d) 5 e) N.A.