



# RECURSOS DIDÁCTICOS

QUINTO DE SECUNDARIA

ÁLGEBRA

## MATRICES Y DETERMINANTES

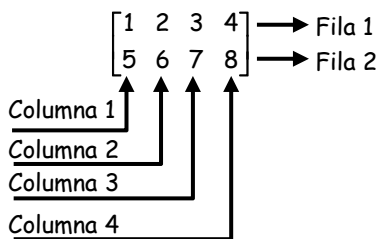
### Matrices y Determinantes

#### Matriz

Arreglo rectangular de elementos o números, que consta de m filas por n columnas.

Se dice que es de orden m x n.

Ejemplo:



Matriz de Orden 2 x 4

#### Determinante

Es el valor que adopta una matriz.

Ejemplo:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix} \rightarrow \text{Matriz}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Determinante}$$

$$|A| = 5(2) - 4(3) = -2$$

Valor del Determinante

**Nota:** El determinante de A o |A| también se denota con Δ.

**Matriz Cuadrada.** Cuando el número de filas es igual al número de columnas.

Ejemplos:  $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ ; de orden 2 x 2



## Determinantes de Segundo Orden

Para su cálculo efectuamos las operaciones del recuadro indicadas por las flechas :

$$= \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$$

**Ejemplos:** Hallar el determinante de las siguientes matrices

1.  $P = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{bmatrix}$

2.  $Q = \begin{bmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ -7 & \sqrt{2} \end{bmatrix}$

3.  $R = \begin{bmatrix} x-1 & x \\ 2 & x+1 \end{bmatrix}$

**Solución:**

Apliquemos la RESTA DE PRODUCTOS CRUZADOS en cada ejemplo :

1.  $\Delta P = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = (3)(2) - (5)(7) \quad \Delta P = 6 - 35 \quad \boxed{\Delta P = -29} \text{ Rpta.}$

2.  $\Delta Q = \begin{vmatrix} \sqrt{2} & 3 \\ -7 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} \times \sqrt{2} - (3)(-7) \quad \Delta Q = 2 + 21 \quad \boxed{\Delta Q = 23} \text{ Rpta.}$

3.  $\Delta R = \begin{vmatrix} x-1 & x \\ 2 & x+1 \end{vmatrix} = (x-1)(x+1) - (x)(2) \quad \Delta R = \boxed{x^2 - 1 - 2x} \text{ Rpta.}$

## Determinantes de Tercer Orden

En este curso, sólo emplearemos para el cálculo de estos determinantes la REGLA DE SARRUS, cuyo procedimiento es el siguiente:

Se repite las dos primeras filas (o las dos primeras columnas) a continuación de las existentes, después de lo cual :

Se suman los resultados de multiplicar los elementos de la diagonal principal y las dos paralelas a ellas que tengan 3 elementos, obteniendo  $S_1$ .

Se suman los resultados de multiplicar los elementos de la diagonal secundaria y las dos paralelas a ellas que tengan 3 elementos, obteniendo  $S_2$ .

- El valor del determinante estará dado por :  $\Delta = S_1 - S_2$

Así : Si el determinante a calcular fuera :

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ r & s & t \end{vmatrix}$$

## Método 1

\* Por la REGLA DE SARRUS horizontal, volvemos a escribir las dos primeras columnas en el lado derecho :

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 a & b & c & a & b \\
 m & n & p & m & n \\
 r & s & t & r & s
 \end{array}
 = \underbrace{(ant + bpr + cms)}_{DP} - \underbrace{(cnr + aps + bmt)}_{DS}$$

## Método 2

\* Por la REGLA DE SARRUS vertical, volvemos a escribir las dos primeras filas en la parte inferior :

$$\begin{array}{ccc|ccc}
 a & b & c & & & \\
 m & n & p & & & \\
 r & s & t & & & \\
 \hline
 a & b & c & & & \\
 m & n & p & & & 
 \end{array}
 = \underbrace{(ant + msc + rbp)}_{DP} - \underbrace{(cnr + psa + tbn)}_{DS}$$

### Ejemplos:

Hallar el determinante  $\Delta$  :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix}$$

### Solución:

\* Por la REGLA DE SARRUS horizontal :

$$\Delta = \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\
 4 & 5 & 6 & 4 & 5 \\
 7 & 8 & 9 & 7 & 8
 \end{array}$$

$$\Delta = [1 \times 5 \times 9 + 2 \times 6 \times 7 + 3 \times 4 \times 8] - [3 \times 5 \times 7 + 1 \times 6 \times 8 + 2 \times 4 \times 9]$$

$$\Delta = [45 + 84 + 96] - [105 + 48 + 72]$$

$$\Delta = 225 - 225 \Rightarrow \boxed{\Delta = 0} \text{ Respuesta}$$

Comprobemos:

\* Por la REGLA DE SARRUS vertical:

$$\Delta = \begin{array}{ccc|ccc}
 1 & 2 & 3 & & & \\
 4 & 5 & 6 & & & \\
 7 & 8 & 9 & & & \\
 \hline
 1 & 2 & 3 & & & \\
 4 & 5 & 6 & & & 
 \end{array}$$

Aplicando:  $\Delta = D.P. - D.S.$

$$\Delta = [1 \times 5 \times 9 + 4 \times 8 \times 3 + 7 \times 2 \times 6] - [3 \times 5 \times 7 + 6 \times 8 \times 1 + 9 \times 2 \times 4]$$

$$\Delta = [45 + 96 + 84] - [105 + 48 + 72]$$

$$\Delta = 225 - 225 \Rightarrow \boxed{\Delta = 0}$$

**EJERCICIOS DE APLICACIÓN**

1. Sea A una matriz:  $A = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

Determinar:  $|A|$

- a) 1                      b) -1                      c)  $0^3$   
d) 5                      e) -2

2. Sea B una matriz triangular superior:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Determinar:  $|B|$

3. Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 4 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 5 & 0 & 7 \\ 3 & -4 & 5 \end{bmatrix}$$

Indicar:  $A + B$

a)  $\begin{bmatrix} 7 & 1 & 1 \\ 7 & -1 & 9 \\ 7 & 4 & 6 \end{bmatrix}$                       d)  $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 7 & -1 & 9 \\ 7 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 7 & 5 & 9 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$                       e)  $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 7 & 1 & -1 \\ 7 & -1 & 9 \\ 2 & -4 & 6 \end{bmatrix}$

4. Si:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$

$$B = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Indicar el valor de  $|A| + |B| + |C|$

- a) 10                      b) 15                      c) -15  
d) 7                      e) -7

5. Dados:

$$A = \begin{bmatrix} m & 2m \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & p \\ a & b \end{bmatrix}$$

Indicar el valor de:  $E = a + b + p + m$

Siendo:  $A = B$

- a) 6                      b) 10                      c) 12  
d) 16                      e) 18

6. Si:

$$A = \begin{bmatrix} m & n \\ 2n-1 & n+1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 9 & 2 \\ a & b \end{bmatrix}$$

Indicar:  $a + b$

- a) 2                      b) 4                      c) 6  
d) 8                      e) 20

7. Sea:

$$A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ m^2-1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} m & n & p \\ k & l & q \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Donde:  $A = B$

Indicar: " $A + B$ "


a)  $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

b)  $\begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 7 \\ 6 & 8 & 4 \end{bmatrix}$

c)  $\begin{bmatrix} 10 & 8 & 6 \\ 4 & 2 & 4 \\ 6 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

d)  $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 \\ 6 & 8 & 2 \\ 12 & 8 & 2 \end{bmatrix}$

e)  $\begin{bmatrix} 3 & 8 & 6 \\ 4 & 1 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$

 Calcular los siguientes determinantes:

8.  $\begin{vmatrix} \sqrt{7} & 0 \\ 1 & \sqrt{7} \end{vmatrix}$

- a) 1                      b) 6                      c) 5  
d) 4                      e) 7

9.  $\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

- a) 3                      b) 2                      c) 1  
d) 6                      e) 0

10. Resolver:

$$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

- a) 1                      b) 2                      c) 3  
d) 4                      e) 5

11. Calcular:

$$|A| = \begin{vmatrix} 2x-\sqrt{2} & -7\sqrt{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{7} & 2x+\sqrt{2} \end{vmatrix} =$$

- a)  $x$                       b)  $4x$                       c)  $x^2$   
d)  $4x^2$                       e) N.A.

12. Calcular:

$$|B| = \begin{vmatrix} -\sqrt{5} & 2 & -1 \\ 3 & \sqrt{5} & -4 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}$$

- a)  $9 - 7\sqrt{5}$       b)  $9 + 7\sqrt{5}$       c)  $18 - 14\sqrt{5}$   
 d)  $18 + 14\sqrt{5}$       e) N.A.

13. Calcular:

$$|E| = \begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$$

- a)  $2ab$       b)  $2(a^2 + b^2)$       c)  $a^2 + b^2$   
 d)  $4ab$       e) N.A.

14. Simplificar:

$$E = \frac{\begin{vmatrix} z & 0 & x \\ y & x & 0 \\ 0 & z & y \end{vmatrix}}{xyz}$$

- a) 1      b) 2      c) 3  
 d) 4      e) N.A.

15. Indicar el valor de:

$$E = \sqrt{\begin{vmatrix} a^2 & 2ab & b^2 \\ b^2 & a^2 & 2ab \\ 2ab & b^2 & a^2 \end{vmatrix}}$$

- a)  $a^3 - b^3$       b)  $a^2 + b^2$       c)  $ab^2$   
 d)  $a + b$       e) N.A.

Indicar: "x + y"

- a) 1      b) -1      c) 0  
 d) -2      e) 2



## Ejercicios Adicionales



1. Calcular el valor de:

$$E = \begin{vmatrix} b-c & c-a & a-b \\ c-a & a-b & b-c \\ a-b & b-c & c-a \end{vmatrix}$$

- a) b      b) a      c) 1  
 d) 0      e) N.A.

2. Calcular el determinante de:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & 0 \end{vmatrix}$$

Rpta.: n!

3. Simplificar:

$$P = \frac{\begin{vmatrix} (y+z)^2 & x^2 & x^2 \\ y^2 & (x+z)^2 & y^2 \\ z^2 & z^2 & (x+y)^2 \end{vmatrix}}{(x+y+z)^3}$$

- a) xyz      b) 2xyz      c) 3xyz  
 d) 4xyz      e) 6xyz

4. Demostrar:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (c-b)(c-a)(b-a)$$

5. Calcular:

$$E = \begin{vmatrix} -2a & a+b & a+c \\ a+b & -2b & b+c \\ a+c & b+c & -2c \end{vmatrix}$$

- a)  $2(b+c)(a+c)(a+b)$   
 b)  $4(b+c)(a+c)(a+b)$   
 c)  $(a+b)(a+c)(b+c)$   
 d)  $a^3 + b^3 + c^3$   
 e)  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc$

**TAREA DOMICILIARIA N° 7**

1. Si:  $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$   
 $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$   
 Indicar:  $A + B$

- a)  $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$       c)  $\begin{bmatrix} 5 & 5 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$   
 d)  $\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ 8 & 8 \end{bmatrix}$       e)  $\begin{bmatrix} 5 & 8 \\ 8 & 5 \end{bmatrix}$

2. Si:  $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$   
 Indicar:  $2A$

- a)  $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 13 \end{bmatrix}$       b)  $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 12 \end{bmatrix}$       c)  $\begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 8 & 10 \end{bmatrix}$   
 d)  $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$       e)  $\begin{bmatrix} 2 & 12 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$

3. Si:  $A = B$   
 Siendo:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & b \\ m & 2 & 3 \end{bmatrix}$        $B = \begin{bmatrix} a & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$   
 Indicar:  $\frac{a+b}{m}$

- a) 3      b) 6      c) 5  
 d) 10      e) 8

4. Resolver: (siendo  $x < 0$ )

$\begin{vmatrix} x & 2 \\ 2 & x \end{vmatrix} = 5$

- a) 3      b) 4      c) 5  
 d) -2      e) -3

I. Calcular los siguientes determinantes:

5.  $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{vmatrix}$

- a) 4      b) -4      c) 2  
 d) 10      e) 14

6.  $\begin{vmatrix} -3 & -6 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}$

- a) -1      b) 0      c) 1  
 d) 2      e) -2

7.  $\begin{vmatrix} -a & (a^2 - 2a + 4) \\ a + 2 & -a^2 \end{vmatrix}$

- a) 2      b) 4      c) a  
 d)  $a^3$       e) 8

8.  $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix}$

- a) 3      b) 6      c) 9  
 d) 12      e) 15

9.  $\begin{vmatrix} 5\sqrt{2} + 1 & 7 - \sqrt{3} \\ 7 + \sqrt{3} & 5\sqrt{2} - 1 \end{vmatrix}$

- a) 1      b) 2      c) 3  
 d) 4      e) 5

10. Calcular:

$E = \begin{vmatrix} x - y & y(x + y) \\ -2 & x + y \end{vmatrix}$

- a) 1      b)  $(x + y)^2$       c)  $(x - y)^2$   
 d) -2      e) 0

11. Resolver en "x"

$\begin{vmatrix} 2 & -4 & -1 \\ 2 & x & -2 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = 5$

- a) -1      b) -2      c) -3  
 d) -4      e) -5

12. Calcular:

$\begin{vmatrix} m + n & m - n \\ m - n & m + n \end{vmatrix}$

- a) 4m      b)  $(m + n)^2$       c) 4mn  
 d) 3mn      e)  $(m - n)^2$

13. Calcular el determinante de "A" si:  $A = B + C$

Siendo:  $B = \begin{bmatrix} 5 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$        $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

- a) -1      b) -2      c) -3  
 d) 0      e) 1

14. Sean las matrices:

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$        $B = \begin{bmatrix} -1 & 4 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

Determinar:  $|A|^2 + |B|^2$

- a) 100      b) 101      c) 102  
 d) 103      e) 104

15. Sean las matrices:

$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$        $B = \begin{bmatrix} 5 & -9 \\ 7 & 4 \end{bmatrix}$        $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

Hallar:

- I.  $A + B$   
 II.  $3A - 2B$   
 III.  $A + 2B + 3C$