



# RECURSOS DIDÁCTICOS

TERCERO DE SECUNDARIA

ÁLGEBRA

## SUMA Y RESTA DE POLINOMIOS

### LA NOCIÓN CLÁSICA DEL POLINOMIO

Un ejemplo sencillo : Situémonos en el conjunto  $\mathbb{R}$ , que es del álgebra elemental, y denominemos "x" un número real cualquiera (lo cual, como recordamos, se escribe  $x \in \mathbb{R}$ ). He aquí un ejemplo de cálculo susceptible de ser efectuado sobre los números como x.

Supongamos que x designa una longitud indeterminada (medida en metros); entonces  $x^2$  designará la superficie de un cuadrado de lado x y  $x^3$  el volumen de un cubo de arista x.

Imaginemos que una persona compra : Una cuerda cuya longitud equivale tres veces a la longitud de x, es decir  $3x$  metros y cuyo precio es de 2 soles el metro; esta cuerda cuesta pues :

$$3x \cdot 2 = 6x \text{ soles}$$

Un tablero de contrachapado de superficie  $2x^2$  (en metros cuadrados), al precio de 12 soles el metro cuadrado; por lo tanto, este tablero cuesta  $2x^2 \cdot 12 = 24x^2$  soles.

Un tonel de vino de capacidad igual a  $x^3$  (en metros cúbicos), al precio de 2 soles el litro (de 2000 soles el metro cúbico, puesto que en un metro cúbico hay 1000 litros); cueste  $2000x^3$  soles.

Después de estas compras, le quedan 50 soles se pide expresar la suma que esta persona tenía inicialmente. Es perfectamente evidente que esta suma depende de x y que no se puede conocer, puesto que x es indeterminado; sin embargo puede expresarse en soles bajo la forma :

$$50 + 6x + 24x^2 + 2000x^3 \quad (1)$$

Una expresión como (1) se denomina polinomio de una indeterminada (la indeterminada es x); se representa con frecuencia por  $P(x)$ , que se lee "P de x" (P es la inicial de la palabra "polinomio"). Las compras de una segunda persona llevarían a establecer, por ejemplo, el polinomio :  $P_1(x) = 30 + 2x - 15x^2 + 50x^3$

El signo "-" delante de  $15x^2$  significa una deuda equivalente a la suma de  $15x^2$  soles. Para otra persona podría tenerse :  $P_2(x) = 15 - 2x + 2x^2$ , etcétera.

Lo que distingue de los polinomio P,  $P_1$ ,  $P_2$ , ....., no es la presencia de la indeterminada x a la potencia 1, a la potencia 2, etc., sino el conjunto de coeficientes :

(50 , 6 , 24 , 2000)	para el primer polinomio
(30 , 2 , -15 , 50)	para el segundo polinomio
(15 , -2 , 3)	para el tercer polinomio

Para terminar, es posible realizar, por supuesto, operaciones con los polinomios como  $P + P_1$  o  $P \cdot P_1$ .

Estas observaciones no llevarán a una definición algo más general de los polinomios. En lo que sigue, x definirá siempre la magnitud indeterminada sobre la que se calcula, y los coeficientes se indicarán mediante letras minúsculas como a, b, c, ... o -para no agotar demasiado aprisa el alfabeto- mediante minúsculas afectadas por un índice, es decir, por un número entero (0, 1, 2, ...). Escrito en caracteres pequeños en la parte inferior y a la derecha de una letra :  $a_1$  se lee "a uno" o "a índice 1".

La notación por medio de índices, que ya nos es familiar, atemoriza a veces a los no matemáticos. Sin embargo, no tiene nada de misterioso : simplemente es un medio cómodo de ordenar las letras del alfabeto.

## SUMA Y RESTA DE MONOMIOS Y POLINOMIOS

- **La Suma o Adición** : Es una operación que tiene por objeto reunir dos o más expresiones algebraicas (**sumandos**) en una sola expresión algebraica (**suma**).

Así, la suma de  $a$  y  $b$  es  $a + b$ , porque esta última expresión es la **reunión** de las dos expresiones algebraicas dadas :  $a$  y  $b$ .

La suma de  $a$  y  $-b$  es  $a - b$ , porque esta última expresión es la **reunión** de las dos expresiones dadas :  $a$  y  $-b$ .

- **Carácter General de la Suma Algebraica** : En Aritmética, la suma siempre significa **aumento**, pero en Álgebra la suma es un concepto más general, pues puede significar **aumento** o **disminución**, ya que hay sumas algebraicas como la del último ejemplo, que equivale a una resta en Aritmética.

Resulta, pues, que **sumar una cantidad negativa equivale a restar una cantidad positiva de igual valor absoluto**.

Así, la suma de  $m$  y  $-n$  es  $m - n$ , que equivale a **restar** de  $m$  el valor absoluto de  $-n$  que es  $|n|$ .

La suma de  $-2x$  y  $-3y$  es  $-2x - 3y$ , que equivale a restar de  $-2x$  el valor absoluto de  $-3y$  que es  $|3y|$ .

- **REGLA GENERAL PARA SUMAR**

Para sumar dos o más expresiones algebraicas se escriben unas a continuación de las otras con sus propios signos y se reducen los términos semejantes si los hay.

### I. SUMA DE MONOMIOS

1. **Sumar :  $5a$ ,  $6b$  y  $8c$**

Los escribimos unos a continuación de otros con sus propios signos, y como  $5a = +5a$ ,  $6b = +6b$  y  $8c = +8c$  la suma será:

$$5a + 6b + 8c$$

**El orden de los sumandos no altera la suma.** Así,  $5a + 6b + 8c$  es lo mismo que  $5a + 8c + 6b$  o que  $6b + 8c + 5a$ .

Esta es la **Ley Conmutativa** de la suma.

2. **Sumar :  $3a^2b$ ,  $4ab^2$ ,  $a^2b$ ,  $7ab^2$  y  $6b^3$**

Tendremos :

$$3a^2b + 4ab^2 + a^2b + 7ab^2 + 6b^3$$

Reduciendo los términos semejantes, queda :

$$4a^2b + 11ab^2 + 6b^3$$

3. **Sumar :  $3a$  y  $-2b$**

Cuando algún sumando es **negativo**, suele incluirse dentro de un paréntesis para indicar la suma; así :

$$3a + (-2b)$$

La suma será :

$$3a - 2b$$

4. **Suma :  $7a$ ,  $-8b$ ,  $-15a$ ,  $9b$ ,  $-4c$  y  $8$**

Tendremos :

$$7a + (-8b) + (-15a) + 9b + (-4c) + 8$$

$$7a - 8b - 15a + 9b - 4c + 8$$

$$-8a + b - 4c + 8$$

- **La Resta o Sustracción** : Es una operación que tiene por objeto, dada una suma de dos sumandos (**minuendo**) y uno de ellos (**sustraendo**), hallar el otro sumando (**resta o diferencia**).

Es evidente, de esta definición, que la **suma del sustraendo y la diferencia tiene que ser el minuendo**.

Si de  $a$  (minuendo) queremos restar  $b$  (sustraendo), la diferencia será  $a - b$ . en efecto :  $a - b$  será la diferencia si sumada con el sustraendo  $b$  reproduce el minuendo  $a$ , y en efecto :  $a - b + b = a$ .

- **Regla General para Restar** : Se escribe el minuendo con sus propios signos y a continuación el sustraendo con los signos cambiados y se reducen los términos semejantes, si los hay.

### I. RESTA DE MONOMIOS

1. **De  $-4$  restar  $7$**

Escribimos el minuendo  $-4$  con su **propio signo** y a continuación el sustraendo  $7$  con el **signo cambiado** y la resta será :

$$-4 - 7 = -11$$

En efecto :  $-11$  es la diferencia porque sumada con el sustraendo  $7$  reproduce el minuendo  $-4$  :

$$-11 + 7 = -4$$

2. **Restar  $4b$  de  $2a$**

Escribimos el minuendo  $2a$  con su signo y a continuación el sustraendo  $4b$  con el **signo cambiado** y la resta será :

$$2a - 4b$$

En efecto :  $2a - 4b$  es la diferencia, porque sumada con el sustraendo  $4b$  reproduce el minuendo :

$$2a - 4b + 4b = 2a$$

3. Restar  $4a^2b$  de  $-5a^2b$

Escribo el minuendo  $-5a^2b$  y a continuación el sustraendo  $4a^2b$  con el signo cambiado y tengo :

$$-5a^2b - 4a^2b = -9a^2b$$

$-9a^2b$  es la diferencia, porque sumada con el sustraendo  $4a^2b$  reproduce el minuendo :

$$-9a^2b + 4a^2b = -5a^2b$$

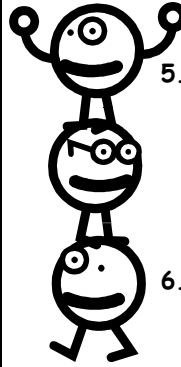
4. De 7 restar -4

Cuando el sustraendo en **negativo** suele incluirse dentro de un paréntesis para indicar la operación, de este modo distinguimos el signo - que indica la resta del signo - que señala el carácter negativo del sustraendo. Así :

$$7 - (-4) = 7 + 4 = 11$$

El signo - delante del paréntesis está para **indicar la resta** y este signo no tiene más objeto que decirnos, de acuerdo con la regla general para restar, que **debemos cambiar el signo**

al sustraendo  $-4$ . Por eso a continuación del minuendo  $7$  escribimos  $+4$ .



5. De  $7x^3y^4$  restar  $-8x^3y^4$

Tendremos :

$$7x^3y^4 - (-8x^3y^4) = 7x^3y^4 + 8x^3y^4 = 15x^3y^4$$

6. De  $-\frac{1}{2}ab$  restar  $-\frac{3}{4}ab$

Tendremos :

$$-\frac{1}{2}ab - (-\frac{3}{4}ab) = -\frac{1}{2}ab + \frac{3}{4}ab = \frac{1}{4}ab$$

➤ **Carácter General de la Resta Algebraica** : En Aritmética la resta siempre implica **disminución**, mientras que la resta algebraica tiene un carácter más general, pues puede significar **disminución** o **aumento**.

Hay restas algebraicas, como las de los ejemplos 4 y 5 anteriores, en que la **diferencia es mayor que el minuendo**.

Los ejemplos 4, 5 y 6 nos dicen que **restar una cantidad negativa** equivale a **sumar la misma cantidad positiva**.

### EJERCICIOS DE APLICACIÓN

1. Si el polinomio es de 4º grado. Hallar "m" :

$$P(x) = \sqrt{7} x^{1+m} + \sqrt{6} x^{2+m} + \sqrt{5} x^{3+m}$$

- a) 0                      b) 2                      c) 1  
d) 3                      e) 4

2. Sumar los siguientes monomios :

$$M(x, y) = ax^2y^3z^5$$

$$N(x, y) = bx^2y^3z^4 \quad \text{Indicar su coeficiente :}$$

- a)  $a + b$                       b)  $az^5 + bz$                       c)  $a - b$   
d)  $az^5 - bz^4$                       e)  $az^5 + bz^4$

3. Indicar cuál de las siguientes sumas de monomios es correcta :

I.  $3x^2 + 2x^2 + bx^2 = 7x^2$  ,  $b > 30$

II.  $7x^2 + 2x^2 + 5x^3 = 14x^3$

III.  $3x^2 + 5x^3 + 7x^4 = 15x^9$

- a) Sólo I                      b) Sólo II                      c) I y II  
d) I y III                      e) Ninguna

4. Si al sumar los siguientes monomios  $ax^2y^3 + bx^2y^3$  resulta  $2cx^2y^3$ . Indicar :

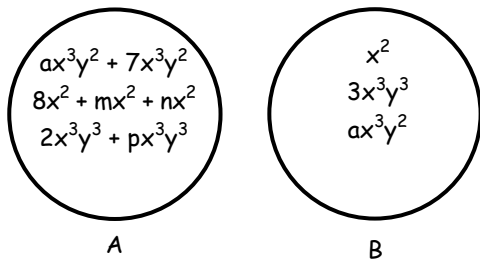
$$A = \frac{a+b+7c}{9}$$

- a) 1                      b) 2                      c) c  
d) 3                      e) 2c

5. Se tiene :  $M(x) = 3x^2 + 2x + 1$   
 $N(x) = 7x^2 + 2x + 3$   
 Se sabe que :  $2M(x) + 3N(x) = ax^2 + bx + c$ .  
 Indicar :  $a + b + c$

- a) 10                      b) 28                      c) 38  
 d) 48                      e) 58

6. Del grafico, relacionar A con B



7. Indicar la suma de cada una de las siguientes sumas de monomios :

- I.  $3x^2y + 5xy^2 + 7x^2y + 5x^3 + 20xy^2 + 3xy^2 + 7x^2y$   
 II.  $8ab + 7a^2b + 22ab^2 + 50ab + 3a^2b + 4ab^2 + 3ab$   
 III.  $3m^3 + 3k^2 + 5pm^2 + 20m^3 + 32k^2 + 7mp^2 + 8pm^2 + 2m^3$   
 IV.  $3p^2y + 5px^2 + 7p^2y + 5x^2p + 10px^2 + 13p^2y + 7x^2p$

8. Dados los polinomios :  $P(x) = 3x + 2$   
 $Q(x) = 5x + 3$

Hallar :

$$E = \frac{5P(x) + 3Q(x) - 19}{x}$$

- a) 10                      b) 20                      c) 30  
 d) 40                      e) 50

9. Sean los términos :  $t_1 = 7\sqrt{6} x^{2m-5}$  ,  
 $t_2 = 5\sqrt{3} x^{m+3}$  , se sabe que :  $t_1 + t_2 = \sqrt{3} pt_2$ .  
 Indicar el calor de  $2m + 1$

- a) 15                      b) 16                      c) 17  
 d) 18                      e) 19

10. Si al polinomio :  $P(x) = 3x^2y^3 + 5x^{m+3}y^4$  se le resta  $2x^8y^4$  el grado disminuye. Indicar el valor de "m".

- a) 0                      b) 1                      c) 2  
 d) 6                      e) 5

11. Se realizan las siguientes sumas de términos semejantes :  $px^a + qx^b + rx^c = 5pqr x^b$ . Indicar

$$M = \frac{p+q+r}{pqr}$$

- a) 3                      b) 5                      c) 7  
 d) 9                      e) 6

12. Hallar la expresión equivalente más simple de :

$$A = \frac{3(x+7y) - 4(2x+5y) + 6x}{3(x+y) + 4(x+3y) - 2(x+2y) - 6y}$$

- a)  $x + y$                       b)  $x/y$                       c)  $x - y$   
 d) 1                      e)  $1/5$

13. En la siguiente adición de monomios :

$$mx^a + \frac{m}{4} x^{4-a} = bx^{b-3}. \text{ Indicar : } \sqrt{m+a+b-2}$$

- a) 1                      b) 2                      c) 3  
 d) 4                      e) 5

14. Indicar la suma de los siguientes monomios y polinomios :

- a.  $x^3 + xy^2 + y^3$  ,  $-5x^2y + x^3 - y^3$  ,  $2x^3 - 4xy^2 - 5y^3$   
 b.  $-7m^2n + 4n^3$  ,  $m^3 + 6mn^2 - n^3$  ,  $-m^3 + 7m^2n + 5n^3$   
 c.  $x^4 - x^2 + x$  ,  $x^3 - 4x^2 + 5$  ,  $7x^2 - 4x + 6$   
 d.  $a^4 + a^6 + 6$  ,  $a^5 - 3a^3 + 8$  ,  $a^3 - a^2 - 14$   
 e.  $x^5 + x - 9$  ,  $3x^4 - 7x^2 + 6$  ,  $-3x^3 - 4x + 5$   
 f.  $a^3 + a$  ,  $a^2 + 5$  ,  $7a^2 + 4a$  ,  $-8a^2 - 6$   
 g.  $x^4 - x^2y^2$  ,  $-5x^3y + 6xy^3$  ,  $-4xy^3 + y^4$  ,  $-4x^2y^2 - 6$   
 h.  $xy + x^2$  ,  $-7y^2 + 4xy - x^2$  ,  $5y^2 - x^2 + 6xy$  ,  $-6x^2 - 4xy + y^2$

- i.  $a^3 - 8ax^2 + x^3$ ,  $5a^2x - 6ax^2 - x^3$ ,  $3a^3 - 5a^2x - x^3$ ,  $a^3 + 14ax^2 - x^3$
- j.  $-8a^2m + 6am^2 - m^3$ ,  $a^3 - 5am^2 + m^3$ ,  $-4a^3 + 4a^2m - 3am^2$ ,  $7a^2m - 4am^2 - 6$
- k.  $x^5 - x^3y^2 - xy^4$ ,  $2x^4y + 3x^2y^3 - y^5$ ,  $3x^3y^2 - 4xy^4 - y^5$ ,  $x^5 + 5xy^4 + 2xy^5$
- l.  $a^5 + a^6 + a^2$ ,  $a^4 + a^3 + 6$ ,  $3a^2 + 5a - 8$ ,  $-a^5 - 4a^2 - 5a + 6$
- m.  $a^4 - b^4$ ,  $-a^3b + a^2b^2 - ab^3$ ,  $-3a^4 + 5a^3b - 4a^2b^2$ ,  $-4a^3b + 3a^2b^2 - 3b^4$
- n.  $m^3 - n^3 + 6m^2n$ ,  $-4m^2n + 5mn^2 + n^3$ ,  $m^3 - n^3 + 6mn^2$ ,  $-2m^3 - 2m^2n + n^3$
- o.  $a^x - 3a^{x-2}$ ,  $5a^{x-1} + 6a^{x-3}$ ,  $7a^{x-3} + a^{x-4}$ ,  $a^{x-1} - 13a^{x-3}$
- p.  $a^{x+2} - a^x + a^{x+1}$ ,  $-3a^{x+3} - a^{x-1} + a^{x-2}$ ,  $-a^x + 4a^{x+3} - 5a^{x+2}$ ,  $a^{x-1} - a^{x-2} + a^{x+2}$
- q.  $\frac{2}{3}a^2 + \frac{1}{5}ab - \frac{1}{2}b^2$ ,  $\frac{5}{6}a^2 - \frac{1}{10}ab + \frac{1}{6}b^2$ ,  $-\frac{1}{12}a^2 + \frac{1}{20}ab - \frac{1}{3}b^2$
- r.  $\frac{5}{6}x^2 - \frac{2}{3}y^2 + \frac{3}{4}xy$ ,  $-\frac{1}{2}xy - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{8}y^2$ ,  $\frac{5}{6}xy - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{4}y^2$
- s.  $a^3 - \frac{1}{2}ab^2 + b^3$ ,  $\frac{5}{6}a^2b - \frac{3}{8}ab^2 - 2b^3$ ,  $\frac{1}{4}a^3 - \frac{1}{2}a^2b - \frac{3}{5}b^3$

### TAREA DOMICILIARIA

1. Si el polinomio es de 5º grado. Hallar "p" :  
 $P(x) = \sqrt[3]{3} x^{1+p} + \sqrt{6} x^{2+p} + \sqrt{7} x^{4+p}$
- a) 0                      b) 2                      c) 3  
 d) 1                      e) 4
2. Sumar los siguientes monomios :  $M(x) = 3x^3y^3$   
 $N(x) = 5x^3y^2$
- a) 8                      b)  $3y + 5y^2$                       c)  $3x^3 + 5y^2$   
 d)  $5y^3$                       e)  $3y^2$

3. Indicar cuál de las siguientes sumas de monomios es correcta :

I.  $3x^5 + 6x^5 + 7x^5 = 16x^{15}$

II.  $ax^3y^2 + bx^3y^2 + cx^3y^2 = (a + b + c)x^3y^2$

III.  $mx^2 + nx^3 + px^3 = (m + n + p)x^8$

- a) Sólo I                      b) Sólo II                      c) Sólo III  
 d) I y II                      e) Ninguna

4. Si al sumar los siguientes monomios  $mx^2 + nx^2$  resulta  $px^2$ . Calcular :  $E = \frac{m+n+p}{p}$

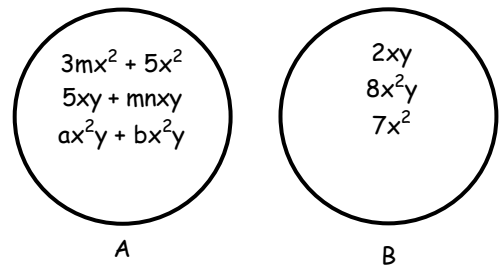
- a) 1                      b) 2                      c) 3  
 d) p                      e) 2p

5. Se tiene :  $P(x) = 3x + 2$   
 $Q(x) = 5x + 3$

Se sabe que :  $P(x) + 2Q(x) \equiv mx + n$ . Hallar :  $m + n$

- a) 1                      b) 2                      c) 10  
 d) 20                      e) 21

6. En el siguiente grafico, relacionar las sumas de A con los resultados de B.



7. Indicar la suma de cada una de las siguientes sumas de monomios.

I.  $3ab + 5a^2b + 7ab + 3a^2b + 4ab^2 + 7ab^2 + 21a^2b$

II.  $mn^2 + mn + m^2n + 3mn + 4mn^2 + 5n^2m + 7nm^2$

III.  $4pq + 7p^2q + 10pq^2 + 8p^3 + 33p^2q + 16pq + 18p^3$

IV.  $3p^2y + 22xy^2 + 21xy + 3xy^2 + 22p^2y + 35xy$

8. Dados los polinomios :  $M(x) = 3x + 27$

$$N(x) = 18x + 3$$

$$\text{Hallar : } E = \frac{6M(x) - N(x)}{3}$$

- a) 50                      b) 51                      c) 52  
d) 53                      e) 54

9. Sean los términos :  $t_1 = \frac{4}{5}x^{5+n}$  ,  $t_2 = \frac{3}{4}x^{12}$  se

sabe que :  $t_1 + t_2 \equiv 3t_1$ . Indicar el valor de  $n + 1$

- a) 2                      b) 4                      c) 6  
d) 8                      e) 10

10. Si al polinomio :  $Q(x) = 5x^2 + 7x^3 + 8x^{m+5}$  se le resta  $2x^{10}$  el grado absoluto disminuye.

Indicar el valor de :  $E = \sqrt{m-1}$

- a) 0                      b) 1                      c) 2  
d) 3                      e) 4

11. Se realizan las siguientes sumas de términos semejantes :  $ax^m + bx^n + cx^p = 7abcx^p$ . Indicar

$$E = \frac{a+b+c}{abc}$$

- a) 2                      b) 4                      c) 6  
d) 7                      e) 9

12. Hallar la expresión equivalente más simple de :

$$E = \frac{4(x^2 + y^2) - 3(x^2 - y^2) + (x^2 - 7y^2)}{4x^2 - 5xy - 7x^2 + 6xy + 3x^2}$$

- a)  $2y/x$                       b) 2                      c) 1  
d)  $3x/y$                       e)  $2x/y$

13. En la siguiente adición de monomios :

$$\frac{c}{3}x^a + \frac{c}{2}x^{6-a} = bx^{b-2}. \text{ Hallar : } (a + b + c)$$

- a) 14                      b) 12                      c) 10  
d) 20                      e) 24

14. Sumar :

- a.  $m, n$   
b.  $m, -n$   
c.  $-3a, 4b$   
d.  $5b, -6a$   
e.  $7, -6$   
f.  $-6, 9$   
g.  $-2x, 3y$   
h.  $3x + x^3, -4x^2 + 5, -x^3 + 4x^2 - 6$   
i.  $x^2 - 3xy + y^2, -2y^2 + 3xy - x^2, x^2 + 3xy - y^2$   
j.  $a^2 - 3ab + b^2, -5ab + a^2 - b^2, 8ab - b^2 - 2a^2$   
k.  $-7x^2 + 5x - 6, 8x - 9 + 4x^2, -7x + 14 - x^2$   
l.  $a^3 - 4a + 5, a^3 - 2a^2 + 6, a^2 - 7a + 4$   
m.  $-x^2 + x - 6, x^3 - 7x^2 + 5, -x^3 + 8x - 5$   
n.  $a^3 - b^3, 5a^2b - 4ab^2, a^3 - 7ab^2 - b^3$   
o.  $\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}xy, \frac{1}{2}xy + \frac{1}{4}y^2$   
p.  $a^2 + \frac{1}{2}ab, -\frac{1}{4}ab + \frac{1}{2}b^2, -\frac{1}{4}ab - \frac{1}{5}b^2$   
q.  $x^2 + \frac{2}{3}xy, -\frac{1}{6}xy + y^2, -\frac{5}{6}xy + \frac{2}{3}y^2$   
r.  $\frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{2}y^2, -\frac{2}{5}xy + \frac{1}{6}y^2, \frac{1}{10}xy + \frac{1}{3}y^2$